CRISTIAN - RADU STAICU

ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE PLANA SI SFERICA

2015

SUMAR

INTRODUCERE

Paginile de faţă au un scop modest dar util - acela de a pune la dispoziţia persoanelor care, asemeni autorului, nu sunt nici olimpici, nici studenţi la matematică, nici nu visează să câştige premiul Abel, un ghid practic într-un domeniu dificil însă indispensabil vieţii noastre - TRIGONOMETRIA. Ideea unei astfel de lucrări s-a cristalizat atunci când am căutat explicaţiile unor ecuaţii din trigonometria sferică pe Internet şi am observat că trebuie să consult prea multe lucrări parţiale, cele mai multe în limbi străine (engleză, franceză, italiană), de multe ori prea specializate pentru situaţiile obişnuite. Ghidul de față este o sinteză a acestora, precum și a altor cărți din domeniul public; deși „au o vârstă" ele sunt încă valoroase dacă sunt revăzute într-o manieră apropiată de exigențele secolului nostru. Trebuie spus că am căutat soluţiile cele mai simple, iar în acest scop am folosit şi demonstraţii proprii. Sunt explicate aproximativ o sută de ecuații trigonometrice; trei sau patru care necesitau demonstrații laborioase au fost doar enunțate, în cazurile respective făcându-se trimiteri la o sursă electronică accesibilă.

Expunerea se vrea a fi clară şi logică, simplu de folosit, cititorul având nevoie doar de cunoştinţe normale de algebră şi geometrie plană. Am folosit un sistem identic de expunere atât în partea referitoare la trigonometria plană cât şi la cea sferică, astfel încât să se poată detaşa cu claritate paralelismele şi diferenţele dintre cele două situaţii. Am evitat: 1. demonstraţiile din analiza matematică - care implicau limite de funcţii sau integrale; 2. utilizarea logaritmilor, căutând întotdeauna demonstraţii simple de tip algebric. Am exclus din acest ghid acele ecuaţii care nu erau necesare expunerii şi demonstraţiilor, fiind doar probe de virtuozitate matematică; câteva - triunghiurile polare, ecuaţiile lui Gauss - fiind considerate utile, dar implicând demonstraţii de un nivel mai ridicat decât cel al paginilor de faţă - au fost prezentate succint.

Deoarece am presupus că teoremele fundamentale ale geometriei sunt cunoscute, nu am dat demonstraţia lor. Acestea, împreună cu acele teoreme trigonometrice care se puteau dovedi prea specializate pentru publicul ţintă şi scopul limitat pe care mi l-am propus, au fost tratate drept „definiţii şi axiome preliminare".

Autorul este cel dintâi care recunoaşte că nu a realizat un tratat exhaustiv, dar reaminteşte că nu a avut nici un moment ambiţia de a scrie un manual.

NOTAŢII

ÎN PLAN		PE SUPRAFAŢA SFEREI
A, B, C	unghiurile triunghiului	*A, B, C*
a = BC		*a = BC*
b = AC	laturile triunghiului	*b = AC*
c = AB		*c = AB*
O	centrul cercului	*O*= centrul sferei
P = a + b + c	perimetrul triunghiului	*P = a + b + c*
p = ½(a+b+c)	semi-perimetrul triunghiului	*p = ½(a+b+c)*
R	raza cercului circumscris	R_o
r	raza unui cerc oarecare	*r*
r'	raza cercului înscris	r_o
S ABC	suprafaţa triunghiului ABC	*S ABC*

∈ = face parte din... 𝒫 = polul calotei sferice

ǁ paralele _|_ perpendicular

<)ABC, ˆA unghiuri ~AB arc

ρ = unghi sau arc măsurat în radiani

û = un unghi în general α, β... = unghiuri oarecare

Dacă un triunghi este dreptunghic, unghiul drept va fi A.

Pentru a simplifica redactarea am scris orice element referitor la sferă în *italice.* a, AB sunt drepte, dar *a, AB* sunt *arce*. Din motive practice [vezi Nota], am folosit de multe ori / pentru semnul de fracţie şi [ ]$^{1/2}$ pentru rădăcina pătrată. Raza sferei este considerată egală cu 1, astfel că în cele mai multe cazuri ea nu apare, dar atunci când a fost nevoie am indicat-o prin *Rs*.

Notă. O imperfecţiune a programului "WINDOWS" face dificilă scrierea exponenților atunci când se află sub radical și la numărătorul sau numitorul unei fracţii, de aceea am căutat să evit acest inconvenient folosind alte modalităţi de scriere echivalente ori de câte ori a fost posibil.

I - TRIGONOMETRIA PLANĂ

1. AXIOME ŞI DEFINIŢII

1. Două puncte determină o dreaptă.

2. Trei puncte sau - echivalent - un punct şi o dreaptă determină un plan.

3. Unghiurile se măsoară prin arcele lor, cu condiţia ca vârfurile lor să fie în centrul cercului (=unghiuri la centru). Dacă vârful se află pe circumferinţă mărimea unghiului este jumătate din cea a arcului său.

4. Suma unghiurilor unui triunghi este 180º.

5. Orice latură a unui triunghi este mai mare decât diferenţa celorlalte două şi mai mică decât suma lor: $a + b > c > a - b$.

6. În orice triunghi laturii mai mari i se opune unghiul mai mare.

7. Triunghiul isoscel are două laturi şi unghiurile de la baza lor egale. În particular, atunci când toate trei laturile sunt egale, toate unghiurile au 60º, iar triunghiul este echilateral.

8. Dreapta care împarte în două părţi egale un unghi se numeşte bisectoare. În triunghi cele trei bisectoare sunt concurente (se întâlnesc) în centrul cercului înscris.

9. Perpendicularele pe mijlocul fiecărei laturi a unui triunghi se numesc mediatoare şi se întâlnesc în centrul cercului circumscris. Orice triunghi se poate înscrie într-un cerc.

10. Dreapta care uneşte un vârf cu mijlocul laturii opuse lui se numeşte mediană. În triunghi medianele sunt concurente în centrul de greutate, aflat la 2/3 din lungimea medianei faţă de vârful ei.

11. Înălţimile triunghiului sunt perpendicularele coborâte din vârfuri pe laturile opuse

2. FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE

În triunghiul dreptunghic există între cele trei laturi următoarele 6 relaţii:

(Â = 90º a = ipotenuza, b, c = catetele b ⊥ c ˆB + ˆC= 90º)

b/a = sin ˆB = cos ˆC α

c/a = cos ˆB = sin ˆC β

b/c = tg ˆB = ctg ˆ C γ

c/b = ctg ˆ B = tg ˆC δ

a/b = cosec ˆB = sec ˆC

a/c = sec ˆB = cosec ˆC

Notă: prescurtările pentru sinus, cosinus, secantă şi cosecantă au fost întotdeauna aceleaşi, dar pentru tangentă şi cotangentă s-au mai folosit tan, respectiv cotg, cotan. Se observă imediat că, în general:

sin û = cos (90º - û) (a)

cos û = sin (90º - û) (b)

tg û= ctg û (90º- û) (c)

ctg û = tg (90º - û) (d)

cosec û= 1/sin û

sec û = 1/cos û

sin û = tg û cos û

cos û = ctg û sin û

tg û = sin û/ cos û = 1/ctg û = sin û sec û

ctg û = cos û/ sin û = 1/tg û = cos û cosec û

În general, secanta şi cosecanta sunt mult mai puţin folosite decât celelate funcţii.

Teorema lui Pitagora în triunghiul ABC se poate scrie

$a^2 = b^2 + c^2$ împărţind cu a^2 obţinem

$b^2 / a^2 + c^2 / a^2 = 1$

$\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = \cos^2 \hat{C} + \sin^2 \hat{C} = 1$ sau în general

$\underline{\sin^2 û + \cos^2 û = 1}$ [1]

$(\sin^2 û / \cos^2 û) + 1 = 1/ \cos^2 û$

$1 + (\cos^2 û / \sin^2 û) = 1/\sin^2 û$

De aici se ajunge la următoarele reguli de transformare:

$\sin û = \pm [1 - \cos^2 û]^{1/2}$ $\cos û = \pm[1 - \sin^2 û]^{1/2}$ (e)

$\text{tg } û = \pm \sin û / [1 - \sin û^2]^{1/2} = \pm[1 - \cos^2 û]^{1/2} / \cos û$ (f)

$\text{ctg } û = \pm[1 - \sin û^2]^{1/2} / \sin û = \pm \cos û / [1 - \cos^2 û]^{1/2}$ (g)

$\cos û = \pm 1 / [1 + \text{tg}^2 û]^{1/2}$ $\sin û = \pm \text{tg } û / [1 + \text{tg}^2 û]^{1/2}$ (h)

$\sin û = \pm 1 / [1 + \text{ctg}^2 û]^{1/2}$ $\cos û = \pm \text{ctg } û / [1 + \text{ctg}^2 û]^{1/2}$ (i)

Se observă imediat că atunci când una din catete devine egală cu zero şi unghiul opus ei are 0º. Relaţiile α - δ , a - d şi ecuaţia [1] ne arată că pentru unghiurile 0º şi 90º funcţiile trigonometrice au următoarele valori:

$\sin 0° = \cos 90° = 0$ $\sin 90° = \cos 0° = 1$

$\text{tg } 0° = \text{ctg } 90° = 0$ $\text{tg } 90° = \text{ctg } 0° = +\infty$

Valorile funcţiilor trigonometrice sunt mărimi scalare, aşadar numere reale în sine, fără un determinant, spre deosebire de arce şi unghiuri în cazul cărora avem întotdeauna exprimată o unitate de măsură, de ex. 10 grade, 1 radian , 1 ½ dr.

Unghiurile între care există relaţia $\alpha + \beta = 90°$ se numesc complementare,

iar cele între care există relaţia $\alpha + \beta = 180°$ se numesc suplementare.

3. TEOREMA COSINUSULUI

Teorema lui Pitagora este un caz particular al unei teoreme aplicabile oricărui triunghi numită *teorema cosinusului*. Ea va ajuta la înţelegerea tuturor celorlalte teoreme şi ecuaţii care urmează.

Se dă triunghiul oarecare ABC. Se duce înălţimea AD, D ∈ BC, AD_|_BC.

Se observă imediat că AD împarte latura BC în două părţi care sunt de fapt proiecţiile laturilor AB şi AC pe BC, deoarece triunghiurile ABD şi ACD sunt dreptunghice. Prin urmare putem scrie

BC=AB cosˆB + AC cosˆC ceea ce este identic cu notaţia

a = c cos ˆB + b cosˆC

Pentru a simplifica atât calculele cât şi înţelegerea lor să notăm

$AD=h_1$ BD=x DC=y BD=a-y DC=a-x

Teorema lui Pitagora ne arată că există egalităţile:

$h_1^2= c^2 - x^2$ $h_1^2= b^2-(a-x)^2$ $h_1^2 = b^2-y^2$ $h_1^2= c^2 -(a-y)^2$

de unde deducem

$c^2 - x^2= b^2 - a^2 - x^2 + 2ax$ $c^2= b^2 - a^2 + 2ax$

$b^2 - y^2 = c^2 - a^2 - y^2 + 2ay$ $b^2 = c^2 - a^2 + 2ay$

$- b^2= - a^2 - c^2 + 2ax$ $b^2= a^2 + c^2 - 2ax= a^2 + c^2 - 2ac \cos\hat{B}$

$- c^2 = - a^2 - b^2 + 2ay$ $c^2= a^2 + b^2 - 2ay= a^2 + b^2 - 2ab \cos\hat{C}$

Aşadar,

într-un triunghi pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două minus dublul produsul lor înmulţit cu cosinusul unghiului dintre ele.

Pentru latura BC=a se deduc imediat relaţiile

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\hat{A}$, $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ [2]

dar dacă $\hat{A} = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$ $2\,ab \cos\hat{C} = 2\,b^2$ $2ac \cos \hat{B} = 2c^2$

$a^2 = b^2 + c^2$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,c^2 = a^2 - c^2$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,b^2 = a^2 - b^2$

adică egalităţile care rezultă direct din teorema lui Pitagora.

4. OPERAŢIUNI CU FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE

Teorema cosinusului ne ajută să înţelegem cum se obţin funcţiile trigonometrice ale unor sume, diferenţe, părţi sau multipli ai unor unghiuri date.

4.1. Sume şi diferenţe de unghiuri

Pentru a simplifica explicaţiile, vom discuta pentru început doar de unghiuri ascuţite. Fie arcul de cerc AOB $\leq 90^\circ$, OA = OB = R. Alegem un punct pe arc, notându-l cu C.

OC = R, <) AOB = α, <) AOC = β, <) COB = $\alpha - \beta$. Se cere $\cos(\alpha - \beta)$.

Ducem perpendicularele BB' _|_ OA şi CC' _|_ OA, B' $\in$ OA, C' $\in$ OA.

OBB' şi OCC' sunt triunghiuri dreptunghice, astfel că

BB'= R $\sin \alpha$, CC' = R $\sin \beta$, OB' = R $\cos \alpha$, OC' = R $\cos \beta$.

Putem scrie lungimea coardei BC în două feluri, dacă observăm că aceasta este în acelaşi timp

1. latură în triunghiul isoscel COB, în care celelalte laturi sunt raze

2. ipotenuză în triunghiul dreptunghic obţinut prin construirea unei paralele la OA prin punctul C. Notăm cu Y punctul în care această paralelă întâlneşte BB'.

YB'= CC' -paralele între paralele

YB =R($\sin \alpha - \sin \beta$)   YC = R($\cos \beta - \cos \alpha$)

În triunghiul COB avem

$BC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(\alpha - \beta)$,

iar în triunghiul YBC

$BC^2 = R^2(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + R^2(\cos\beta - \cos\alpha)^2$, efectuând ridicările la pătrat şi dând R^2 factor comun putem scrie

$BC^2 = R^2[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) - 2(\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta)]$.

Fiecare din primele două paranteze este egală cu 1 - vezi ecuaţia [1], aşadar cele două ecuaţii pot fi echivalate sub forma

$2R^2 - 2R^2 \cos(\alpha - \beta) = 2R^2 - 2R^2(\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta)$, împărţim cu $-2R^2$ şi obţinem rezultatul căutat:

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ [3]

Ecuaţia [1] ne permite să calculăm $\sin(\alpha - \beta)$:

$\sin^2(\alpha - \beta) = 1 - \cos^2(\alpha - \beta) = 1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\beta -$

$- 2\cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta$

$1 = \sin^2\beta + \cos^2\beta$

$\sin^2(\alpha - \beta) = (1 - \cos^2\alpha)\cos^2\beta + (1 - \sin^2\alpha)\sin^2\beta - 2\cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta$

$\sin^2(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha \cos^2\beta + \sin^2\beta \cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta$

$\sin^2(\alpha - \beta) = (\sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha)^2$

Fiind un pătrat, $|\sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha| = |\sin\beta \cos\alpha - \sin\alpha \cos\beta|$, dar ordinea termenilor se poate stabili observând că

$\alpha > \beta$, $\sin(\alpha - \beta) > 0$, BB'> CC'= YB', aşadar $\sin\alpha > \sin\beta$, OA > OB',
deci $\cos\beta > \cos\alpha$ - prin urmare

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$ [4]

Să calculăm cosinusul şi sinusul unghiului $-\beta = 0 - \beta$

$\cos 0° = 1$ $\sin 0° = 0$

cos (0º-β) = 1x cos β + 0 x sin β = cos β

sin (0º-β) = 0 x cos β - 1x sin β = - sin β

Dacă scriem unghiul α + β sub forma

α + β = [α - (-β)] obţinem imediat ecuaţiile

cos(α + β) = cos α cos β - sin α sin β [5]

sin (α + β) =sin α cos β + sin β cos α [6]

Reamintindu-ne că tg û = sin û / cos û, iar ctg û = cos û / sin û, calculăm imediat suma şi diferenţa acestor unghiuri, simplificând ecuaţiile în cazul tangentei cu

cos α cos β, iar în cazul cotangentei cu sin α sin β.

$$\text{tg}\ (\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\text{tg}\ \alpha - \text{tg}\ \beta}{1+\text{tg}\ \alpha\ \text{tg}\ \beta} \quad [7]$$

$$\text{tg}\ (\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta}{1-\text{tg}\ \alpha\ \text{tg}\ \beta} \quad [8]$$

$$\text{ctg}\ (\alpha - \beta) = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha} = \frac{\text{ctg}\ \alpha\ \text{ctg}\ \beta + 1}{\text{ctg}\ \beta - \text{ctg}\ \alpha} \quad [9]$$

$$\text{ctg}\ (\alpha + \beta) = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha} = \frac{\text{ctg}\ \alpha\ \text{ctg}\ \beta - 1}{\text{ctg}\ \beta + \text{ctg}\ \alpha} \quad [10]$$

4.2. Semnul funcţiilor trigonometrice şi limitele valorilor lor

Am limitat în paragraful anterior demonstraţia la unghiuri ascuţite. Aceasta nu duce la invalidarea ecuaţilor [3] - [10] pentru unghiurile obtuze. Trebuie însă discutate două aspecte fundamentale: care sunt limitele de valori admise pentru fiecare funcţie şi care sunt regulile pe care le urmează. Acum avem posibilitatea să facem această discuţie. Să dăm, rând pe rând, unghiului α valorile 90º, 180º, 270º, 360º, β ≤ 90º. S-a discutat mai sus situaţia 90º-β, (α - β) ∈ [0º, 90º], de aceea nu se repetă ceea ce s-a spus. Toate funcţiile au valori pozitive, sin şi tg sunt crescătoare, cos şi ctg sunt descrescătoare în acest interval. Indiferent de intervalul considerat, funcţia tangentă este crescătoare, iar cotangenta descrescătoare.

$\underline{\alpha = 90^\circ}$ $(\alpha + \beta) \in [90^\circ, 180^\circ]$

$\sin 90^\circ = 1$ $\cos 90^\circ = 0$ $\sin (90^\circ + \beta) = \cos \beta$ $\cos (90^\circ + \beta) = - \sin \beta$

$\text{tg} (90^\circ + \beta) = \cos \beta / (-\sin \beta) = - \text{ctg} \beta$

$\text{ctg} (90^\circ + \beta) = (-\sin \beta) / \cos \beta = - \text{tg} \beta$

Limitele funcţiei sinus sunt între 1 şi 0, valoarea ei este pozitivă şi descreşte atunci când β creşte. Pentru β = 90º, adică sin 180º, valoarea este 0.

Funcţia cosinus este negativă, descreşte de la 0 la - 1 pentru 180º.

Tangenta şi cotangenta sunt negative, deorece sinusul şi cosinusul au semne diferite. Fiecare dintre ele ia valoarea 0 atunci când funcţia de la numărător are valoarea 0 şi -∞ atunci când funcţia de la numitor are valoarea 0, astfel că avem o funcţie negativă crescătoare în cazul tangentei şi una negativă descrescătoare în cazul tangentei. Există un punct de discontinuitate în cazul valorilor tg 90º:

tg 90º = +∞, tg (90º + 1") = - 206 264,806245....

şi unul în cazul celor ale ctg 180º:

ctg 180º = -∞, ctg (180º + 1") = + 206 264,806245...

Nu trebuie să pară surprinzător că venind dinspre 90º spre 180º, ctg tinde spre -∞, iar dinspre 180º spre 270º pornim de la +∞. ∞ este un *simbol care arată o tendinţă, nu un număr în adevăratul sens al cuvântului. Valoarea infinită nu este niciodată atinsă, o funcţie cu numitorul 0 - în cazul nostru* cos /0 *nu are sens.* -∞ *şi* +∞ arată de fapt că pentru un unghi care diferă de 180º cu o mărime infinitezimală - să presupunem 1"/1.000.000.000.000 - vom obţine o valoare care *tinde* spre infinit, totuşi este un număr real, negativ sau pozitiv, după cum este semnul funcţiei pe intervalul respectiv. Acelaşi lucru se poate spune şi despre tangentele unghiurilor 90º şi 270º şi despre cotangenta de 360º.

Valorile absolute -mărimea fără semn - sunt ale funcţiilor identice ale unghiui complementar al lui β.

$\underline{\alpha = 180^\circ}$ $(\alpha - \beta) \in [90^\circ, 180^\circ]$

$\sin 180^\circ = 0$ $\cos 180^\circ = -1$

$\sin (180^\circ - \beta) = \sin \beta$ $\cos (180^\circ - \beta) = - \cos \beta$

$tg (180^\circ - \beta) = - tg \beta$ $ctg (180^\circ - \beta) = - ctg \beta$

Valoarea absolută a funcţiei este aceeaşi cu a funcţiei corespunzătoare a unghiului ascuţit, dar numai sinusul este pozitiv. Intervalul între care poate varia unghiul este acelaşi ca mai sus [90º, 180º], aşadar toate celelalte observaţii sunt identice.

$(\alpha + \beta) \in [180^\circ, 270^\circ]$

Valorile minime şi maxime pe care le pot lua funcţiile sunt următoarele:

$\sin 180^\circ = 0$ $\sin 270^\circ = - 1$ $\cos 180^\circ = - 1$ $\cos 270^\circ = 0$

$tg 180^\circ = 0$ $tg 270^\circ = + \infty$ $ctg 180^\circ = + \infty$ $ctg 270^\circ = 0$

$\sin (180^\circ + \beta) = - \sin \beta$ $\cos (180^\circ + \beta) = - \cos \beta$

$tg (180^\circ + \beta) = tg \beta$ $ctg (180^\circ + \beta) = ctg \beta$

Valorile absolute sunt cele ale funcţiilor corespunzătoare ale lui β.Sinusul este descrescător şi negativ, cosinusul crescător şi negativ. Tangenta şi cotangenta sunt pozitive, tangeta este crescătoare, iar cotangenta descrescătoare. Punctele de discontinuitate sunt 270º pentru tangentă şi 180º pentru cotangentă.

$\underline{\alpha = 270^\circ}$ $(\alpha - \beta)$

$\sin (270^\circ - \beta) = - \cos \beta$ $\cos (270^\circ - \beta) = - \sin \beta$

$tg (270^\circ - \beta)= ctg \beta$ $ctg (270^\circ - \beta) = tg \beta$

Valorile absolute sunt cele ale funcţiei unghiului complementar al lui β. Intervalul, semnele şi celelalte observaţii sunt identice cu acelea de la 180º+ β.

$(\alpha + \beta) \in [270^\circ, 360^\circ]$

$\sin 270^\circ = - 1$ $\sin 360^\circ = 0$ $\cos 270^\circ = 0$ $\cos 360^\circ = 1$

$tg 270^\circ = -\infty$ $tg 360^\circ = 0$ $ctg 270^\circ = 0$ $ctg 360^\circ = - \infty$

$\sin(270° + \beta) = -\cos\beta$ $\cos(270° + \beta) = \sin\beta$

$tg\ (270° + \beta) = -ctg\ \beta$ $ctg\ (270° + \beta) = -tg\ \beta$

Funcţia cosinus este pozitivă în acest interval, celelalte sunt negative. Cotangenta este descrescătoare, toate celelalte sunt crescătoare. Valorile în mărime absolută sunt cele ale funcţiei identice a unghiului complementar al lui β.

<u>α = 360°</u> $(\alpha - \beta) \in [270°, 360°]$

360° - β este o altă formă de a scrie 0° - β, astfel încât

$\sin(360° - \beta) = \sin(0° - \beta) = -\sin\beta$

$\cos(360° - \beta) = \cos(0° - \beta) = \cos\beta$

$tg\ (360° - \beta) = tg\ (0° - \beta) = -tg\ \beta$

$ctg\ (360° - \beta) = ctg\ (0° - \beta) = -ctg\ \beta$

Funcţia are valoarea funcţiei identice a unghiului (-β). Fiind vorba de acelaşi interval [270°, 360°], observaţiile sunt identice cu acelea de la punctul 270° + β.

Unghiurile (360° + β) sunt unghiurile ascuţite obişnuite din intervalul [0°, 90°].

Note. 1. În manualele de trigonometrie se foloseşte pentru explicarea semnelor şi valorilor funcţiilor un cerc având centrul în punctul 0 al unui sistem cartezian de coordonate, iar raza sa este 1.Scopul este urmărirea proiecţiilor acestei raze atunci când unghiul său cu axa OX variază. Intervalele de câte 90° sunt numite cadrane, numerotate astfel:

0°-90°= cadranul I, 90°-180°=cadranul II, 180°-270°= cadranul III şi 270°-360°= cadranul IV. Sinusul este pozitiv în cadranele I şi II, cosinusul în I şi IV, tangenta şi cotangenta sunt pozitive în cadranele I şi III. Sinusul este crescător în cadranele IV şi I, cosinusul este crescător în cadranele III şi IV, graficul acestor două funcţii este continuu, are o formă specifică "sinusoidă" şi există un decalaj de 90° între punctul de maxim al cosinusului şi cel de maxim al sinusului.

2. Există tradiţia de a se nota aceste intervale cu mărimea lor în radiani: 0° - $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ - π, π- $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ - 2 π. Deorece am încercat o expunere simplificată, ambele sisteme de mai sus apăreau prea specializate. De asemenea am oferit o variantă "popularizată" pentru limitele funcţiilor tangentă şi cotangentă.

4.3. Dublul, triplul unghiului şi jumătatea sa

Se pot calcula din ecuaţiile de tip $(\alpha + \beta)$ următoarele:

$\sin 2\alpha = \sin\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ [11]

$\cos 2\alpha = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ [12]

$\text{tg}\, 2\alpha = 2\, \text{tg}\, \alpha / (1 - \text{tg}^2\alpha)$ [13]

$\text{ctg}\, 2\alpha = (\text{ctg}^2\alpha - 1) / 2\, \text{ctg}\, \alpha$ [14]

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\, [1 - 2\sin^2\alpha] + 2 \sin\alpha \cos\alpha \cos\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha +$

$+ 2 \sin [1 - \sin^2\alpha] = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$ [15]

$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\, [2\cos^2 - 1] - \sin\alpha\, [2 \sin\alpha \cos\alpha] =$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ [16]

$\text{tg}\, 3\alpha = [\text{tg}\, \alpha\, (1 - \text{tg}^2\alpha) + 2\, \text{tg}\, \alpha] / [(1 - \text{tg}^2\alpha) - 2\, \text{tg}^2\alpha] =$

$= [3\text{tg}\, \alpha - \text{tg}^3\alpha] / [1 - 3\text{tg}^2\alpha]$ [17]

$\text{ctg}\, 3\alpha = [\text{ctg}\, \alpha\, \text{ctg}\, 2\alpha - 1] / [\text{ctg}\, \alpha + \text{ctg}\, 2\alpha] = [\text{ctg}^3\alpha - 3\text{ctg}\, \alpha] / [3\, \text{ctg}^2\alpha - 1]$ [18]

Să privim unghiul α ca fiind $2(\alpha/2)$. Putem scrie atunci:

$\sin\alpha = 2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)$ [19]

$\cos\alpha = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) = 2\cos^2(\alpha/2) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$ [20]

$\text{tg}\, \alpha = 2\, \text{tg}(\alpha/2) / [1 - \text{tg}^2(\alpha/2)]$ [21]

$\text{ctg}\, \alpha = [\text{ctg}^2(\alpha/2) - 1] / 2\, \text{ctg}(\alpha/2)$ [22]

Ecuaţia [20] ne permite să stabilim următoarele relaţii extrem de utile între funcţiile trigonometrice:

$2\sin^2(\alpha/2) = 1 - \cos\alpha \quad 2\cos^2(\alpha/2) = 1 + \cos\alpha$

$\sin(\alpha/2) = \pm [(1 - \cos\alpha)/2]^{1/2}$ [23]

$\cos(\alpha/2) = \pm [(1 + \cos\alpha)/2]^{1/2}$ [24]

$tg\ (\alpha/2) = \pm [(1- \cos \alpha) / (1 + \cos \alpha)]^{1/2}$ [25]

4.4. Funcţiile unghiului α exprimate prin tg (α/2)

Deoarece $\sin(\alpha/2) = tg\ (\alpha/2) \cos(\alpha/2)$ şi $\cos^2(\alpha/2) = 1 / [1 + tg^2(\alpha/2)]$, atunci

$\sin \alpha = 2\ tg\ (\alpha/2) \cos^2 (\alpha/2) = 2\ tg\ (\alpha/2) / [1 + tg^2(\alpha/2)]$ [26]

$\cos \alpha = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)$ dar $\sin^2 (\alpha/2) = tg^2 (\alpha/2) / [1 + tg^2(\alpha/2)]$, aşadar

$\cos \alpha = [1 - tg^2(\alpha/2)] / [1 + tg^2(\alpha/2)]$ [27]

$tg\ \alpha = 2\ tg\ (\alpha/2) / [1 - tg^2(\alpha/2)]$ [28]

$ctg\ \alpha = [1 - tg^2(\alpha/2)] / 2\ tg\ (\alpha/2)$ [29]

Pornind de la egalitățile 26 - 29 şi rezolvând ecuațiile de gradul doi în care apare

tg (α/2) putem echivala tg (α/2) astfel:

$$tg\ (\alpha/2) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{-1 \pm\sqrt{1+tg^2\ \alpha}}{tg\ \alpha}$$

4.5. Sume şi diferenţe de funcţii trigonometrice

Există situaţii când avem nevoie să transformăm o sumă de funcţii trigonometrice în produsul lor şi invers; iată cum procedăm:

Să presupunem că trebuie să transformăm cos α + cos β într-un produs. Facem un artificiu de calcul şi scriem egalităţile

$\alpha = x + y$ $\beta = x - y$ de unde

$\alpha + \beta = 2x$ $x = ½ (\alpha + \beta)$ $\alpha - \beta = 2y$ $y = ½ (\alpha - \beta)$

dar în acest caz

$\cos \alpha + \cos \beta = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + (\cos x \cos y + \sin x \sin y) =$

$$= 2 \cos x \cos y = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad [30]$$

Situaţia inversă se rezolvă astfel

$\cos\alpha \cos\beta = ½ [(\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) + (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)] =$
$= ½ [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ [31]

Similar se obţin următoarele ecuaţii

$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ [32]

$\sin\alpha \sin\beta = ½ [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ [33]

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin x \cos y = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ [34]

$\sin\alpha \cos\beta = ½ [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ [35]

$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin y \cos x = 2 \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ [36]

$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = [\sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha] / \cos\alpha \cos\beta =$

$= \sin(\alpha + \beta) / \cos\alpha \cos\beta$ [37]

$\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \sin(\alpha - \beta) / \cos\alpha \cos\beta$ [38]

$\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = [\cos\alpha \sin\beta + \cos\beta \sin\alpha] / \sin\alpha \sin\beta =$

$= \sin(\beta + \alpha) / \sin\alpha \sin\beta$ [39]

$\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta = \sin(\beta - \alpha) / \sin\alpha \sin\beta$ [40]

$[\sin\alpha + \sin\beta] / [\sin\alpha - \sin\beta] =$

$= 2 \sin ½ (\alpha + \beta) \cos ½ (\alpha - \beta) / 2 \sin ½ (\alpha - \beta) \cos ½ (\alpha + \beta) =$

$= \mathrm{tg}\, ½ (\alpha + \beta)\ \mathrm{ctg}\, ½ (\alpha - \beta) = \mathrm{tg}\, ½ (\alpha + \beta) / \mathrm{tg}\, ½ (\alpha - \beta)$ [41]

$[\sin\alpha + \sin\beta] / [\cos\alpha + \cos\beta] =$

$= 2 \sin ½ (\alpha + \beta) \cos ½ (\alpha - \beta) / 2 \cos [½(\alpha + \beta)] \cos[½((\alpha - \beta)] = \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ [42]

$$[\sin \alpha - \sin \beta] / [\cos \alpha + \cos \beta] = \frac{2 \sin\frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \frac{\alpha + \beta}{2}} \frac{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}} = \mathrm{tg}\, \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$[\sin \alpha + \sin \beta] / [\cos \alpha - \cos \beta] = \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}} = \mathrm{ctg}\, \frac{\alpha + \beta}{2} \quad [43]$$

$$[\sin \alpha - \sin \beta] / [\cos \alpha - \cos \beta] = \frac{2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{-2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}} = -\, \mathrm{ctg}\, \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$[\mathrm{tg}\, \alpha + \mathrm{tg}\, \beta] / [\mathrm{tg}\, \alpha - \mathrm{tg}\, \beta] = \sin (\alpha + \beta) / \sin (\alpha - \beta) \quad [44]$$

4.6 Valorile funcţiilor trigonometrice ale unor unghiuri remarcabile. Folosirea numărului φ

Se poate pune întrebarea de principiu: de ce este util să calculăm unele unghiuri folosind sume de radicali şi de fracţii în epoca laptop - ului, PC-ului, a programelor care ne dau la o simplă apăsare pe taste 30 de zecimale exacte?

Răspunsul este foarte simplu: marea majoritate a mărimilor trigonometrice sunt numere iraţionale - adică, mai simplu spus, au un număr infinit de zecimale - astfel că există situaţii în care folosirea lor sub această formă este foarte greoaie. Dimpotrivă, în anumite stadii ale rezolvării unor probleme - mă refer la *probleme practice, reale, nu din culegeri sau manuale*, folosirea acestor ecuaţii "clasice" este deosebit de utilă, putând duce la simplificări de formule sau la regăsirea unor ecuaţii cunoscute. Din motive practice voi vorbi numai de unghiuri din intervalul 0º - 90º. Toate funcţiile lor sunt pozitive, astfel că semnul radicalului nu va mai fi precizat.

Formula generală de rezolvare va fi

sin nx = cosm x $\quad$ x = 90º/ (n+m)

Să începem cu unghiul de 45º. Triunghiul dreptunghic care are aceste unghiuri este isoscel, astfel încât

$\sin 45° = \cos 45°$ $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$ $2 \sin^2 45° = 2 \cos^2 45° = 1$

de unde $\sin 45° = \cos 45° = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2} / 2$

$\text{tg } 45° = \text{ctg } 45° = 1$

Unghiul de 135 ° = 90° + 45° = 180° - 45° are sinusul $\sqrt{2} / 2$, cosinusul $-\sqrt{2} / 2$,

tg şi ctg -1; unghiul de 225° are sinusul şi cosinusul egale şi negative $-\sqrt{2} / 2$,

tg şi ctg +1; unghiul de 315° are sin negativ $-\sqrt{2} / 2$, cos pozitiv $\sqrt{2} / 2$ şi tg şi ctg -1. [Am prezentat acest caz în detaliu drept un exemplu de folosire extensivă a calculelor. Pentru celelalte unghiuri se vor folosi indicaţiile paragrafului 4.2.]

Funcţiile unghiurilor de 30° şi 60°

$\sin x = \cos 2x$ $\sin x = 1 - 2 \sin^2 x$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0$ $(1 - \sin x)(1 + \sin x) - \sin x (1 + \sin x) = 0$

deoarece $1 + \sin x$ este diferit de 0 putem simplifica ecuaţia

$1 - 2 \sin x = 0$

$\sin x = 1/2$

$\cos x = [1 - ¼]^{1/2} = \sqrt{3}/2$

$\sin 30° = \cos 60° = 1/2$ $\cos 30° = \sin 60° = \sqrt{3}/2$

$\text{tg } 30° = \text{ctg } 60° = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$ $\text{ctg } 30° = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

Funcţiile unghiurilor de 22° 30' şi 67° 30'

Aceste funcţii se obţin calculând ecuaţiile [23] - [25] cu funcţia cos 45°

$\sin 22° 30' = \cos 67° 30' = [½ (1 - \sqrt{2}/2)]^{1/2} = ½ (2 - \sqrt{2})^{1/2}$

$\cos 22° 30' = \sin 67° 30' = ½ (2 + \sqrt{2}))^{1/2}$

$tg\ 22^o\ 30' = ctg\ 67^o\ 30' = [(2 - \sqrt{2}) / (2 + \sqrt{2})]^{1/2} = [(2 - \sqrt{2})^2/(4-2)]^{1/2} =$

$= [(6 - 4\sqrt{2})/2]^{1/2} = (3 - 2\sqrt{2})^{1/2}$

$ctg\ 22^o30' = tg\ 67^o\ 30' = [(2 + \sqrt{2}) / (2 - \sqrt{2})]^{1/2} = [(2 + \sqrt{2})^2/(4-2)]^{1/2} =$
$= [(6 + 4\sqrt{2})/2]^{1/2} = (3 + 2\sqrt{2})^{1/2}$

Se poate continua astfel, calculând din cos 22º 30' funcţiile pentru 11º 15', dar ecuaţiile devin prea complicate pentru avantajul pe care l-ar putea prezenta.

Funcţiile unghiurilor de 15º şi 75º

$\sin 15^o = \sin(45^o - 30^o) = (\sqrt{2}/2) \times (\sqrt{3}/2) - (\sqrt{2}/2) \times 1/2 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \cos 75^o$

$\cos 15^o = \sin 75^o = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

cele două funcţii au valori conjugate astfel încât în cazul tangentei eliminăm radicalul numitorului amplificând fracţia cu numărătorul , $tg = \sin^2 15^o / \sin 15^o \cos 15^o$

$tg\ 15^o = ctg\ 75^o = [6 + 2 - 2\sqrt{12}]/[6 - 2] = 2 - \sqrt{3}$ similar

$ctg\ 15^o = tg\ 75^o = 2 + \sqrt{3}$

Notă. Trebuie subliniat că putem porni şi de la cosinusul unghiului de 30º, unghiul de 15º fiind jumătate cel de 30º. Obţinem

$\sin 15^o = [(1-\sqrt{3}/2)/2]^{1/2} = \frac{1}{2}[2 - \sqrt{3}]^{1/2}$

$\cos 15^o = \frac{1}{2}[2 + \sqrt{3}]^{1/2}$, ceea ce reprezintă alte forme pentru aceleaşi valori.

Funcţiile unghiurilor de 18º şi 72º

Rezolvarea unghiului de 18º este foarte interesantă deoarece ne permite să discutăm o formă elegantă de simplificare a scrierii ecuaţilor.

$\sin 3x = \cos 2x$

$3 \sin x - 4 \sin^3 x = 1 - 2 \sin^2 x$

$3 \sin x (1 - \sin^2 x) = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x (1 - \sin x)$

$1 - \sin x > 0$

$3 \sin x (1 + \sin x) = 1 + \sin x - \sin^2 x$

$3 \sin x + 3 \sin^2 x + \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$

$\sin x = [-2 + (4+16)^{1/2}]/8 = [\sqrt{5} - 1]/4$

$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = [\sqrt{5} - 1]/4 = 1/(2\varphi) = ½ (\varphi - 1)$

$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = [1 - \sin^2 18^\circ]^{1/2} = 1/4[16 - 5 - 1 + 2\sqrt{5}]^{1/2} = 1/4[10 + 2\sqrt{5}]^{1/2} =$

$= ½ [2 + \varphi]^{1/2}$

$\text{tg } 18^\circ = \text{ctg } 72^\circ = [1 - (2/\sqrt{5})]^{1/2} = [2 + \varphi]^{1/2} / [3\varphi + 1]$

$\text{ctg } 18^\circ = \text{tg } 72^\circ = [5 + 2\sqrt{5}]^{1/2} = \varphi[2 + \varphi]^{1/2} = [4\varphi + 3]^{1/2}$

Există în natură o proporţie numită „proporţia de aur” , *„numărul de aur”sau* φ. Este vorba de raportul care împarte un segment de dreaptă astfel încât cele două părţi să se afle în acelaşi raport în care se află cea mai mare dintre ele cu segmentul întreg. Acest raport nu priveşte numai drepte - el se poate referi la raportul dintre lungimea şi lăţimea unui lucru, la raportul dintre lungimea şi înălţimea unei construcţii, a unei statui, la dimensiunile unei vietăţi marine etc. De câte ori apare proporţia φ avem certitudinea unui echilibru - nu este vorba numai de unul artistic, aparent, altfel proporţia aceasta nu ar apărea atât de frecvent în natură. Proprietăţi similare le are şi numărul 1/φ.

Numerele φ şi 1/φ se obţin rezolvând raporturile

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

$xy + y^2 = x^2$

x^2 - xy - y^2=0 | : y^2 $(x/y)^2$ - (x/y) - 1= 0

y^2 + xy - x^2= 0|: x^2 $(y/x)^2$ + (y/x) - 1= 0

x/y= ½ [1 + $(1+4)^{1/2}$]= ½ (1+ $\sqrt{5}$) = φ

y/x = ½ [- 1 + $(1+4)^{1/2}$] = ½ ($\sqrt{5} - 1$) = 1/φ

φ = 1,61803398874989...   1/φ = 0, 61803398874989...

φ - (1/φ) = 1   1/φ = φ - 1

$\varphi^2 - 1 = \varphi$

$\varphi^2 = \varphi + 1$ $1/\varphi^2 = (\varphi-1)^2 = \varphi^2 - 2\varphi + 1 = 2 - \varphi$

$\varphi^3 = \varphi(\varphi+1) = \varphi + 2$ $(\varphi - 1)^3 = 2\varphi - 2 - \varphi - 1 + \varphi = 2\varphi - 3$

$\varphi^4 = \varphi^2 + 2\varphi + 1 = 3\varphi + 2$ $1/\varphi^4 = 4 + \varphi^2 - 4\varphi = 5 - 3\varphi$

Funcţiile unghiului de 18º permit calcularea valorilor pentru 36º şi 54º, a diferenţelor 45º - 36º=9º, 36º-30º= 6º, 30º - 18º=12º, 18º -15º= 3º, 45º-18º=27º şi a unghiurilor complementare corespunzătoare. Folosirea numărului φ simplifică scrierea ecuaţiilor.

Pentru unghiurile mici, între 0º - 5º, sin û ≈ tg û ≈ mărimea unghiului în radiani.

Pentru sin 1º ≈ tg 1°≈ [1505$\sqrt{39}$ – 9031] /21070   cos 1º ≈ [$\sqrt{108}$ + $\sqrt{13}$] / 14

sau cos 1°= $\frac{\sqrt{108}+\sqrt{13}}{14} + \frac{1}{1205721}$

Notă: aceste valori se obțin din sinusul și cosinusul pentru 30° și cos 31°00'9”,789=6/7;

arcsin[1505$\sqrt{39}$ – 9031] /21070 = 0°59'59”,997884715;

arctg[1505$\sqrt{39}$ – 9031] /21070=0°59'59”,4497   ctg 1°=57,2899≈180/π

arccos [$\sqrt{108}$ + $\sqrt{13}$] / 14 =1°00'09”,789 -diferența față de cos 1° fiind -8,29379 x 10^{-7}, astfel că pentru situațiile cele mai frecvente sunt aproximații utile.

5.RELATII TRIGONOMETRICE ÎN CERC

5.1Unităţile de măsură

Aşa cum am arătat, arcurile şi unghiurile la centru au aceeaşi măsură. Există trei tipuri de unităţi: 1. raportate la unghiul drept [dr]; 2. raportate la lungimea razei cercului, *radiani* [rad]; 3.grade - acestea putând fi: sexagesimale[º], cu diviziunile minut sexagesimal ['] =1º/60, secunda sexagesimală ["] = 1º /3600, sau grade centesimale [^{g}], cu diviziunile minutul centesimal [^{c}] = 1^g/100 şi secunda centesimală [^{cc}] = 1^g/10000.

După cu se vede sistemul este destul de complicat în toate cazurile. Indiscutabil s-a început prin a compara orice unghi cu unghiul drept. Dacă este uşor să spui că unghiurile frecvente şi importante 45º, 30º, 60º, 120º şi 135º reprezintă ½, 1/3, 2/3,4/3[=1 ⅓] şi 3/2 [=1 ½] din unghiul drept, alte unghiuri devin adevărate sume de fracţii. O metodă mai bună a fost să se compare lungimea arcului cu raza sa. Treptat s-a observat că există un raport constant între lungimea cercului şi diametrul său - dat fiind că era vorba de o constantă iraţională s-a folosit litera π, iniţiala cuvântului "perimetru". Valoarea sa a fost aproximată de Arhimede între 3 + 10/71 şi 3 + 10/70. Însă aceasta implică, în cazul unghiurilor egale, un raport constant între lungimea arcurilor şi razele cercurilor din care acestea fac parte - fapt evident în cazul cercurilor concentrice în care se delimitează un sector. Gradul sexagesimal s-a obţinut, după toate probabilităţile, din observaţia că o coardă egală cu raza subîntinde un arc egal cu 1/6 din cerc şi divizându-se acest arc în 60 de părţi egale. În antichitate sistemul sexagesimal era folosit la unităţile de lungime, de greutate, în sistemul monetar. Părerile sunt divergente în ce priveşte motivul folosirii acestei baze de numerație, cel mai probabil pare a fi că 60 se putea împărţi la 2,3,4,5,6,10,12,15,20,30, fiind un multiplu comun pentru bazele 10,12 şi 20 folosite concomitent în epocă. Gradul centesimal a fost obţinut prin împărţirea unghiului drept în 100 de părţi. Avem următoarele relaţii fundamentale între aceste unităţi de mărime:

1 cerc = 4 dr = 2π rad = $360º=400^g$

1 dr = π/2 rad=90º= 100^g

1 rad = 180º/π=57º17'44",806... = 206 264",806 247 =0,63661977236758... dr

$1^o = \pi/180^o rad = 0{,}0174532925199433\ rad = 1/90\ dr = 1^g{,}111111....$

Trebuie spus că gradul centesimal a fost un eşec, astăzi nu este folosit decât excepţional. Secunda sexagesimală se divide zecimal. După apariţia calculatoarelor electronice, în programele pentru calculator gradul sexagesimal a fost împărţit în fracţiuni zecimale - v. *Windows*. În acest caz avem

1° 10' = 1,1666666666....   1° 20'= 1,3333333333....

1° 15' = 1,25   1° 25'= 1,41666666666.... etc.

Numărul π = 3,141 592 653 589 793... se poate folosi în scopuri practice sub formele 3, 1416 şi 3,141 aceste variante având avantaje în ce priveşte divizibilitatea: 3,1416 are un număr finit de zecimale pentru orice divizor între 1 şi 12, cu excepţia lui 9 - pentru care se foloseşte 3,141.

$1/\pi = 0{,}318309886183790...$

Notă. Între mărimea în radiani a unui unghi şi valorile funcţiilor sale trigonometrice există relaţii studiate în analiza matematică, dar acestea depăşesc nivelul propus pentru paginile de faţă.

5.2.<u>Relaţii între unghi,coardă, săgeată</u>

Să construim în cercul cu centrul în O şi cu raza R o coardă DE. Coborâm perpendiculara din O pe DE, care intersectează coarda în punctul F şi arcul în punctul G. Ducem razele OD şi OE, realizând un triunghi isoscel ODE,$\hat{O} = \alpha^o = \rho$ rad Ţinând seamă de proprietăţile triunghiurilor isoscele, OF este înălţime, bisectoare a unghiului α, mediatoare a laturii DE şi mediană. În acelaşi timp

OG = OD = OE =R   DF=FE =1/2 DE,   FG=R- OF=săgeata arcului DGE

de unde deducem că

$DE = 2R \sin \frac{1}{2}\alpha,\ \ OF = R\cos\frac{1}{2}\alpha,\ \ FG = R(1-\cos\frac{1}{2}\alpha) = 2R\sin^2\frac{1}{4}\alpha$

dar $DE = 4R\sin\frac{1}{4}\alpha\cos\frac{1}{4}\alpha$, raportul între săgeată şi coardă fiind aşadar

$$2R\sin^2\frac{1}{4}\alpha / 4R\sin\frac{1}{4}\alpha\cos\frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha \qquad [45]$$

iar cel între arc şi săgeată

$$R\rho / 2R\sin^2\frac{1}{4}\rho = \rho / 2\sin^2\frac{1}{4}\rho \qquad [46]$$

Suprafaţa sectorului circular DOE se calculează observând că ea se află în acelaşi raport cu suprafaţa totală a cercului în care se află arcul cu circumferinţa acestuia, aşadar

$S_{DOE}/\pi R^2 = \alpha/360º$ $S_{DOE} = \pi R^2\alpha/360º$, dar $\pi\alpha/360º=\rho/2$ aşadar

$S_{DOE} = \pi R^2\alpha/360º = ½ R^2\rho$ [47]

Suprafaţa dintre coarda DE şi arcul DGE se numeşte segment circular şi se calculează scăzând suprafaţa triunghiului DOE din aria sectorului circular

$S\Delta DOE = OF \times DE/2 = R^2 \sin ½ \alpha \cos ½ \alpha = ½ R^2 \sin \alpha$

$S\ DGEFD = R^2 [(\pi\alpha/360°) - ½ \sin \alpha] = ½ R^2(\rho - \sin \rho)$ [48]

Notă. Întotdeauna coarda subîntinde *__două__* arce, α şi 360º - α. Calculele se fac în funcţie de arcul care ne interesează.

6. REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR

6.1. TEOREMA SINUSULUI

Să construim cercul cu centrul în O şi raza R. Luăm trei puncte oarecare pe circumferinţa lui şi le unim prin segmente de dreaptă, obţinând triunghiul înscris ABC. Ducem razele OA, OB, OC, şi construim mediatoarele OL, OM, ON pe laturile BC=a, AC=b, AB = c. Observăm că vârfurile triunghiului şi unghiurile la centru corespunzătoare au aceleaşi arcuri (~ BC pentru Â şi <) BOC, ~ AC pentru ˆB şi <)AOC, ~AB pentru ˆC şi <)AOB) , deci conform definiţiei 1.3 mărimea unghiurilor triunghiului este jumătate din cea a unghiurilor la centru corespunzătoare - respectiv jumătate din mărimea arcului format de ele.

Aplicând ceea ce ştim de la 5.2 avem:

a = 2 R sin Â   b = 2 R sin ˆB   c = 2 R sin ˆC de unde

a/sin ˆA = b/sinˆB = c/sinˆC= 2R   [49]

Aceasta este teorema sinusului: *într-un triunghi, raportul dintre o latură şi sinusul unghiului opus este constant şi egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului.*

Se observă că în cazul triunghiurilor dreptunghice, ipotenuza este diametrul cercului, deci R=a/2. În cazul triunghiului echilateral R = $a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pentru a afla R în funcţie de laturile triunghiului trebuie să observăm următoarele relaţii derivate din teorema cosinusului:

cos Â = ($b^2 + c^2 - a^2$) / 2 bc,   cos ˆB = ($a^2 + c^2 - b^2$) / 2 ac

cos ˆC = ($a^2 + b^2 - c^2$) / 2 ab .

Ştim din ecuaţia [19] că sin û = 2 sin ½ û cos ½ û, iar din [23] şi [24] cum se calculează sinusul şi cosinusul jumătăţii unghiului din cosinusul unghiului întreg.

1- cos Â = $\frac{2bc - b2 - c2 + a2}{2bc}$ = 2 $\sin^2$ ½ Â

$1 + \cos \hat{A} = \frac{2bc + b2 + c2 - a2}{2bc} = 2 \cos^2 ½ \hat{A}$

dar $2bc - b^2 - c^2 + a^2 = a^2 - (b - c)^2 = (a + c - b)(a + b - c)$

$a - b + c = 2 [\frac{a+b+c-2b}{2}] = 2 (p - b)$; $a + b - c = 2 (p - c)$;

$2 \sin^2 ½ \hat{A} = \frac{4 (p-b)(p-c)}{2bc}$

$\sin ½ \hat{A} = \sqrt{(p-b)(p-c)/bc}$ [50]

$2 bc + b^2 + c^2 - a^2 = (b+c - a)(a + b + c) = 2 (p - a) \times 2p = 4 p (p-a)$

$2 \cos^2 \hat{A} = 4p(p - a) / 2bc$

$\cos ½ \hat{A} = \sqrt{(p-a)p/bc}$ [51]

Funcţiile sunt pozitive deoarece $\hat{A} < 180^o$, deci $\hat{A}/2 < 90^o$, iar sin $\hat{A}$ va fi

$\sin \hat{A} = 2 \sin ½ \hat{A} \cos ½ \hat{A} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} / bc$ [52]

Similar se obţin

$\sin \hat{B} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} / ac$ [53]

$\sin \hat{C} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} / ab$ [54]

$a/ \sin \hat{A} = b/ \sin \hat{B} = c/\sin \hat{C} = abc / 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2 R$

$R = abc / 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ [55]

Să se observe că la numitorul ecuaţiilor de tipul 50 şi 51 apar laturile care formează unghiul, iar la numărător se scad din semiperimetru 1-în cazul sinusului, pe rând, cele două laturi care formează unghiul, 2- în cazul cosinusului latura opusă unghiului. Tangenta jumătăţii unghiului este [50]/[51], iar cotangenta [51]/[50].

Dacă suntem interesaţi de valoarea jumătăţii unui unghi al triunghiului putem folosi relaţiile directe

$\cos \hat{A}/2 = \cos [90^o - \frac{B+C}{2}] = \sin \frac{B+C}{2}$ [56]

$\sin \hat{A}/2 = \sin[90^{\circ} - \frac{B+C}{2}] = \cos\frac{B+C}{2}$ [57]

deoarece ˆA + ˆB + ˆC = 180º   Â = 180º - (ˆB + ˆC).Procedeul este similar pentru celelalte două unghiuri.

6.2.TEOREMA TANGENTEI

Această teoremă se obţine pornind de la teorema cosinusului - ecuaţia [2] -, obţinându-se în faza intermediară alte relaţii importante.

Scriem întâi diferenţa dintre pătratele laturilor a şi b:

$a^2 - b^2 = (b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}) - (a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B})$

$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 - 2bc \cos \hat{A} + 2ac \cos \hat{B}$

$a^2 - b^2 = -(a^2 - b^2) + 2c\,(a \cos \hat{B} - b \cos \hat{A})$

$2\,(a^2 - b^2) = 2c\,(a \cos \hat{B} - b \cos \hat{A})$ $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$ de unde

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a\cos B - b\cos A}{a+b} = \frac{2R(\sin A\cos B - \sin B\cos A)}{2R(\sin A + \sin B)} = \frac{\sin(A-B)}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

simplificând obținem

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} \qquad [58]$$

Similar

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a\cos B - b\cos A}{a-b} = \frac{2R(\sin A\cos B - \sin B\cos A)}{2R(\sin A - \sin B)} = \frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \qquad [59]$$

Împărţind ecuaţia [58] cu ecuaţia [59] rezultă

$$\frac{a-b}{c} : \frac{a+b}{c} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}} \qquad [60]$$

aceasta este teorema tangentei: *între diferenţa şi suma a două laturi ale unui triunghi există acelaşi raport ca între tangenta semidiferenţei şi tangenta semisumei unghiurilor opuse respectivelor laturi.*

Deoarece A+B+C = 180°; A+B = 180° - C; $\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$

$\sin\frac{A+B}{2} = \sin(90° - \frac{C}{2}) = \cos\frac{C}{2}$; $\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}$

ecuațiile 58, 59 și 60 devin

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c} : \frac{a+b}{c} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

6.3. Înălţimile, mediatoarele, medianele, bisectoarele şi raza cercului înscris în triunghi.

Pentru a nu extinde prea mult acest paragraf, voi vorbi în amănunt la fiecare categorie doar despre câte una din aceste drepte, celelalte urmând a fi deduse prin procedee similare, cu excepţia cazurilor când - pentru claritatea expunerii - va trebui să extind demonstraţia şi la celelalte două din acelaşi grup. Înălţimile, medianele şi bisectoarele sunt segmente de dreaptă, mediatoarele sunt semidrepte.

ÎNĂLŢIMILE. Ducem AD _|_ BC şi formăm două triunghiuri dreptunghice: ADB şi ADC; deducem din ele

AD= c sinˆB = b sin ˆC;   BD= c cos ˆB   DC= b cosˆC

În cazul triunghiurilor echilaterale înălţimea este şi mediatoare, mediană şi bisectoare: AD = a sin 60º = ½ a$\sqrt{3}$

În triunghiul dreptunghic catetele sunt înălţimi una pentru cealaltă. Deoarece sin ˆB= b/a, înălţimea ipotenuzei este AD=bc/a; ea creează două triunghiuri asemenea cu triunghiul ABC.

MEDIATOARELE. Fiind semidrepte au un singur capăt, pe latura pe care sunt perpendiculare, totuşi putem stabili patru puncte importante ale fiecărei mediatoare.

1. Punctul în care sunt concurente cele trei mediatoare ale triunghiului este O.
Notând ca în 6.1 cu L mijlocul laturii BC avem

OL = R cos Â   BL = LC = R sin Â = ½ a OL/BL = ctg Â OL = ½ a ctg Â

2. Punctul în care mediatoarea laturii a întâlneşte cercul în partea opusă laturii a.
Să notăm cu F acest punct; prin construcţie

LF = OL + OF = R(1+cos Â) = 2R $\cos^2$ ½ Â   2R = $\frac{a}{\sin \hat{A}}$

LF = ½ a ctg ½ Â (s-a ţinut seama că sin Â = 2 sin ½ Â cos ½ Â)

3. Punctul în care mediatoarea laturii a întâlneşte latura b. Notăm I acest punct; în triunghiul dreptunghic ILC avem

LI/LC= tg ˆC   LI = LC tgˆC= ½ a tg ˆC

4. Punctul J în care mediatoarea laturii a întâlneşte latura c. Similar cu punctul 3 deducem

LJ= ½ a tg ˆB.

Mediatoarele laturilor triunghiului dreptunghic se întâlnesc la mijlocul ipotenuzei, în punctul O. Fie punctele Lb şi Lc în care mediatoarele întâlnesc catetele AC şi, respectiv AB:

OLb ‖ AB, OLc ‖ AC, OLb = ½ a sin ˆC= ½ b, OLc = ½ a sinˆB= ½ c,

OI _|_ BC OI= ½ a tg ˆC= ac/2b OJ = ½ a tg ˆB= ab/2c

Mediatoarele catetelor formează cu ipotenuza şi catetele triunghiuri asemenea cu ΔABC, raportul între laturile corespunzătoare fiind ½. Mediatoarele catetelor, catetele şi vârful Â=90º formează un dreptunghi. Fie punctele Fa, Fb, şi Fc punctele în care cele trei mediatoare intersectează cercul:

OFa = R = $\frac{a}{2}$, LbFb = $\frac{a+b}{2}$,   LcFc= $\frac{a+c}{2}$

În cazul triunghiurilor echilaterale A,F,I şi J coincid.

MEDIANELE. Se calculează folosind teorema cosinusului - ecuaţia [2]. Mediana AL formează două triunghiuri ALB şi ALC. AL este latura comună necunoscută. BL = LC = ½ a şi cunoaştem teoretic cel puţin unul din unghiurile B şi C, astfel că scriem direct

AL = $\frac{1}{2}\sqrt{4\,b^2 + a^2 - 4ab\cos\hat{C}}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{4c^2 + a2^2 - 4\,ac\cos\hat{B}}$.

Punctul G - centrul de greutate al triunghiului, în care se întâlnesc medianele - se află faţă de A la 2/3 din lungimea lui AL:

AG = $\frac{1}{3}\sqrt{4\,b^2 + a^2 - 4ab\cos\hat{C}}$

BISECTOARELE. AN este bisectoarea unghiului Â, N∈ BC; ea formează două - triunghiuri ABN şi ACN.

Triunghiul ABN are unghiurile

$\hat{B}$ $<)BAN = <) CAN = 1/2\ \hat{A}$ $<) BNA = 180^\circ - (\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{A})$; latura $AB = c$,

iar triunghiul ACN are unghiurile

$\hat{C}$ $<) CAN = 1/2\ \hat{A}$ $<) CNA = 180^\circ - (\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{A})$; latura $AC = b$

$\sin <) BNA = \sin (\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{A})$ $\sin <) CNA = \sin (\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{A})$

Se aplică teorema sinusului

$AN/ \sin \hat{B} = c / \sin(\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{A})$ $AN/ \sin \hat{C} = b/\sin (\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{A})$

$AN = c \sin \hat{B} / \sin (\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{A}) = b \sin \hat{C}/ \sin (\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{A})$

RAZA CERCULUI ÎNSCRIS. Fie O' centrul cercului înscris, $O'T = r'$ raza sa perpendiculară pe latura a, $T \in BC$ şi BO', CO' bisectoarele unghiurilor B şi C concurente în O'.

O'T formează două triunghiuri dreptunghice TBO' şi TCO',

$T = 90^\circ$ $<) TBO' = \frac{1}{2}\hat{B}$ $<) TCO' = \frac{1}{2}\hat{C}$ $BT + TC = a$

$BT/O'T = \mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{B}$ $BT = O'T\ \mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{B}$

$TC/ O'T = \mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{C}$ $TC = O'T \mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{C}$

dar $O'T = r'$ $a = r' (\mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{B} + \mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{C})$. Putem scrie prin urmare

$$r' = \frac{a}{\mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{B} + \mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{C}} = \frac{b}{\mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{A} + \mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{C}} = \frac{c}{\mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{B} + \mathrm{ctg}\ \frac{1}{2}\hat{A}}$$

Centrul cercului inscris se află pe bisectoarea oricărui unghi al triunghiului la distanţa $r'/\sin \frac{1}{2}\hat{u}$, $\hat{u} = \hat{A}, \hat{B}$ sau $\hat{C}$ după caz. În cazul triunghiului echilateral

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ $r' = a\frac{\sqrt{3}}{6} = R/2$, iar punctele O,O' şi G coincid.

Dacă triunghiul este dreptunghic se observă că

$\mathrm{ctg}\ 45^\circ = 1$ $\cos \hat{C} = b/a$

ctg ½ ˆC= $\frac{\sqrt{1+\cos C}}{\sqrt{1-\cos C}}=\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}=\frac{a+b}{c}$ r'= $\frac{bc}{a+b+c}$

Se va vedea că r' se poate obţine mai uşor din ecuaţiile suprafeţei triunghiului dreptunghic.

6.4.SUPRAFAŢA TRIUNGHIULUI

Există multe ecuaţii pentru a calcula suprafaţa triunghiului. Se cunoaşte din geometrie că suprafaţa unui triunghi este semiprodusul dintre o latură şi înălţimea perpendiculară pe ea, în acest caz latura fiind denumită „bază”. Putem scrie

S_{ABC} = ½(ab sinˆC) = ½ (ac sinˆB)= ½(bc sin Â)

În cazul triunghiului echilateral $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

iar în cazul triunghiului isoscel S_{ABC} = ½ b^2sinÂ.

Din teorema sinusului - ecuaţia [49] - deducem

$a=\frac{b\sin \hat{A}}{\sin B}=\frac{c\sin \hat{A}}{\sin C}$

$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{c\sin B}{\sin C}$

$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{b\sin C}{\sin B}$

de unde

S_{ABC}= (a^2 sinˆB sinˆC)/ 2 sin Â= (b^2sin Â sinˆC)/ 2 sinˆB =(c^2 sin Â sinˆB)/2 sinˆC; folosind ecuațiile [52] - [54] scriem

$$S_{ABC}= (a^2 \sin\hat{B} \sin\hat{C})/ 2 \sin \hat{A} = a^2 \frac{\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ac} \text{ x } \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab}}{4\,\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Această relaţie între semiperimetru şi suprafaţă este cunoscută din geometrie şi poate fi extinsă şi la patrulaterele inscriptibile dacă vom considera triunghiul un caz particular pentru

p=p-d când d=0, astfel încât pentru patrulatere ea devine

$S_4=\sqrt{(p-d)(p-a)(p-b)(p-c)}$

Este evident că

$R=abc\ /\ 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ =\frac{abc}{4S}$

Dacă ducem bisectoarele AO', BO' ,CO' obţinem trei triunghiuri care au drept înălţime r', iar ca baze laturile a, b, c din ΔABC, prin urmare

$S_{ABC}=\frac{r'(a+b+c)}{2}=r'p \quad r'=\frac{2\,SABC}{a+b+c}=\frac{SABC}{p}$

În cazul triunghiurilor dreptunghice

$S_{ABC}=\frac{bc}{2}$ de unde $r'=\frac{bc}{a+b+c}$ verificând astfel rezultatul din paragraful 6.3.

În general, pentru rezolvarea unui triunghi - aflarea tuturor laturilor, unghiurilor, a suprafeţei şi a dreptelor particulare din interior - sunt necesare şi suficiente 3 elemente, din care cel puțin unul trebuie să fie metric - latură sau suprafaţă .

Cazurile pot fi:

1. cunoaştem toate laturile; se calculează cosinusurile unghiurilor, folosind consecinţa ecuaţiei 2;

2. cunoaştem două laturi şi unghiul dintre ele - de ex. a, b, ^C; se aplică teorema cosinusului pentru a afla latura opusă unghiului, apoi cu teorema sinusului se calculează celelalte două unghiuri;

3. cunoaştem două unghiuri şi o latură care nu este între ele - de ex. a, Â, ^B; se calculează al treilea unghi scăzând suma celor cunoscute din 180º, se aplică apoi teorema sinusului;

4. în cazul în care avem două laturi şi un unghi care nu este între ele -de ex. Â, a,b - înseamnă că el este opus unei laturi cunoscute, se aplică teorema sinusului și se obțin ^B, ^C și latura c:

$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin B}{b}$ sin ^B= $\frac{b \sin \hat{A}}{a}$ ^C= 180° - (Â + ^B)

$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin C}$ $c = \frac{a \sin C}{\sin \hat{A}} = \frac{b \sin C}{\sin B}$

Trebuie subliniat că *există o largă varietate de soluţii pentru rezolvarea strict trigonometrică a triunghiurilor - dar unele variante sunt mai complicate*. De exemplu, în cazul 1 se pot obţine unghiurile din tg ½ û, calculată cu ajutorul semiperimetrului - ecuaţia [50]/ecuaţia [51]; în cazul 2 se poate porni de la una dintre consecințele teoremei tangentelor

Â + ^B = 180° - ^C

$\text{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \text{ctg} \frac{C}{2}$

(Â + ^ B) + (Â - ^ B) = 2 Â

(Â + ^ B) - (Â - ^ B) = 2^B

latura c se obține din teorema sinusului, ecuația 49.

În aceste rezolvări obţinem o funcţie trigonometrică a unghiurilor. Funcţiile inverse, prin care obţinem mărimea unghiului dintr-o valoare trigonometrică se numesc arcsinus, arccosinus, arctangentă, arccotangentă, arccosecantă, arcsecantă - mai general arcfuncţii. Ele se calculează prin ecuaţii din analiza matematică, iar mărimile sunt în radiani. În practică se găsesc folosind tabele trigonometrice sau programe de calculator, obţinându-se unghiurile direct în grade.

II. TRIGONOMETRIA SFERICĂ

7. AXIOME ŞI DEFINIŢII

12. Sfera este locul geometric al punctelor aflate la distanţa *R* de punctul dat *O;* $OR = R_S$ este raza sferei. În general, calculele în trigonometria sferică se fac pentru cazul $R_S = 1$.

13. Cercurile care au centrul în *O* sau, echivalent, au raza R_S sunt denumite cercuri mari.

14. Orice punct al unei sfere poate fi considerat un pol al sferei.(Definiţia polului la II,13.)

15. Prin orice punct al unei sfere trece un număr infinit de cercuri mari - cazul meridianelor .

16. Două cercuri mari nu pot fi paralele: dacă pe o sferă se trasează mai multe cercuri paralele, cel mult unul dintre ele este cerc mare - cazul Ecuatorului.

17. Dacă două cercuri paralele au raza egală, nici unul dintre ele nu este cerc mare.

18. Unghiul unui triunghi sferic se măsoară în planul tangent la arcele care formează unghiul, măsura lui fiind unghiul dintre tangentele la vârf.

19. Suma unghiurilor unui triunghi sferic este întotdeauna mai mare decât 180º şi mai mică decât 540º. V. II,13.

20. Diferenţa $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} - 180° = 2\varepsilon$ se numeşte "exces sferic"; ε este folosit în ecuaţii.

21. Unghiurile la centru dintre razele *OA,OB,OC* au măsura laturilor pe care le formează <) *AOB= arcul AB=c,* <) *AOC=arcul AC=b,* <) *BOC=arcul BC=a*.

22. Suma $a + b + c$ nu poate atinge 360º.

8. TEOREMA COSINUSULUI

Triunghiul *ABC* este un triunghi sferic oarecare, cu laturile *BC=a, AC=b, AB=c*. În cazul laturilor triunghiurilor sferice trebuie să avem mereu în vedere că vorbim de *arcuri de cerc mare*, astfel că avem între ele relaţii trigonometrice, nu metrice. Triunghiurile sferice studiate au laturi $\leq$ 180º; când facem menţiunea că sunt "oarecare" niciunul din unghiuri nu este remarcabil sau egal cu un altul, laturile sunt inegale între ele şi diferite de 90º. În cazul în care triunghiul este dreptunghic, atunci unul, două sau toate trei unghiurile au 90º. Echilateral este triunghiul cu laturile egale, iar rectilater cel în care una din laturi are 90º.

Fie t1 dreapta tangentă în punctul *A* la arcul *AB* şi t2 dreapta tangentă în punctul *A* la arcul *AC*.

$OA=OB=OC = R_S$ B' şi C' sunt punctele unde razele *OB* şi *OC* întâlnesc tangentele t1 şi, respectiv t2.

*OA*_|_ AC', *OA*_|_AB'.

S-au creat astfel patru triunghiuri plane: OAB, OAC (ambele dreptunghice în A), OBC şi AB'C'. Se calculează mai întâi AB' şi AC', apoi OB' şi OC':

tg c = AB'/ OA AB'= OA tg $c = R_S$ tg c ; tg b = AC'/ OA AC'= OA tg b

OB' = R_S /cos $c = R_S$ [1+ tg^2 c]^{½} OC' = R_S /cos $b = R_S$ [1+ tg^2 b]$^{1/2}$

Latura B'C' se poate calcula în două feluri: 1. în Δ AB'C' şi 2. în Δ OB'C', în ambele cazuri folosindu-se teorema cosinusului, în primul caz unghiul fiind $\hat{A}$, iar în al doilea a, dar este evident că ecuaţiile sunt egale, prin urmare

$$R_S{}^2\text{tg}^2\, c + R_S{}^2\text{tg}^2\, b - 2\, R_S{}^2\text{tg}\, b\ \text{tg}\, c\cos\hat{A} = R_S{}^2\left[\, 1+ \text{tg}^2\, c + 1 + \text{tg}^2\, b - 2\,\frac{\cos a}{\cos b\cos c}\,\right].$$

Se simplifică ecuaţiile cu $R_S{}^2$, se elimină tg^2 b,tg^2 c, se scrie în prima parte

tg û= sin û/cos û şi se ajunge la forma

- 2 sin b sin c cos $\hat{A}$ / cos b cos c = 2 - 2(cos a / cos b cos c)

se elimină numitorul şi se împarte cu - 2, ajungându-se la forma:

sin b sin c cos $\hat{A}$ = - cos b cos c + cos a

cos a = cos b cos c + sin b sin c cos $\hat{A}$ [61]

Similar se obţin:

cos b= cos a cos c + sin a sin c cos ˆB

cos c = cos a cos b + sin a sin b cos ˆC

Aceasta este forma teoremei cosinusului pentru triunghiurile sferice.

Se observă că în aceste ecuaţii nu apare raza sferei, aşadar ele nu depind de dimensiunile sferei.

9. TEOREMA SINUSULUI

Pentru a ajunge la a doua teoremă importantă a trigonometriei sferice, este vorba, ca şi în cazul trigonometriei figurilor plane de teorma sinusului, trebuie să obţinem întâi câteva relaţii importante. Din ecuaţia [61] se obţine imediat

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad [62]$$

Ecuaţiile pentru celelalte unghiuri sunt similare. O etapă intermediară necesară este calcularea funcţiilor jumătăţii unghiurilor sferei; deoarece operaţiunile sunt identice se va prezenta în detaliu doar cazul unghiului Â , ecuaţiile finale pentru unghiurile ˆB şiˆC fiind obţinute prin aceleaşi procedee.

$$\sin \frac{\hat{A}}{2}$$

$$1 - \cos \hat{A} = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = 2 \sin^2 \frac{\hat{A}}{2}$$

$$2 \sin^2 \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Numărătorul se transformă într-o sumă de unghiuri după ecuaţiile [31] - [36] din capitolul 4, obţinându-se:

$$\cos(b - c) - \cos a = 2 \sin \frac{b-c+a}{2} \sin \frac{a-b+c}{2}$$

dar $\frac{b-c+a}{2} = \frac{a+b+c}{2} - c$, $\frac{a-b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - b$

notând cu p semisuma arcurilor care formează triunghiul sferic - aceasta este numită tradiţional "semiperimetrul" triunghiului - avem

$\frac{a+b+c}{2} - c = p - c$, $\frac{a+b+c}{2} - b = p - b$.

Simplificând cu 2 şi extrăgând rădăcina pătrată din ecuaţia de mai sus, obţinem mărimea $\sin \frac{\hat{A}}{2}$ - <u>rădăcina este întotdeauna pozitivă deoarece prin construcţie $\hat{A} \leq 180^{\circ}$:</u>

$$\sin \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}} \quad [63]$$

$$\sin \frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin c}}$$

$$\sin \frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a \sin b}}$$

Numitorul este întotdeauna produsul sinusurilor arcurilor care formează unghiul, iar numărătorul este produsul sinusurilor diferenţelor dintre semiperimetru şi fiecare din laturi.

$$\cos \frac{\hat{A}}{2}$$

$$1 + \cos \hat{A} = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = 2 \cos^2 \frac{\hat{A}}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Numărătorul devine

$$\cos a - \cos (b+c) = 2 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} = 2 \sin p \sin (p-a)$$, de unde

$$\cos \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}} \qquad [64]$$

$$\cos \frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-b)}{\sin a \sin c}}$$

$$\cos \frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-c)}{\sin a \sin b}}$$

În cazul cosinusului jumătăţii unghiului numitorul este acelaşi de la sinusul jumătăţii unghiului sferic, iar numărătorul este produsul sinusul semiperimetrului şi sinusul diferenţei dintre semiperimetru şi arcul opus unghiului.

Tangenta şi cotangenta jumătăţilor de unghi se scriu direct din ecuaţiile [63] şi [64]

$$\mathrm{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \quad [65]$$

$$\mathrm{tg} \frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}}$$

$$\mathrm{tg} \frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b)}{\sin p \sin(p-b)}}$$

$$\mathrm{ctg} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin(p-b) \sin(p-c)}} \quad [66]$$

$$\mathrm{ctg} \frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin(p-a) \sin(p-c)}}$$

$$\text{ctg}\,\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\,\sin(p-c)}{\sin(p-a)\,\sin(p-b)}}$$

Deoarece $\sin \hat{u} = 2 \sin \frac{\hat{u}}{2} \cos \frac{\hat{u}}{2}$

$$\sin\ \hat{A} = 2\ \frac{\sqrt{\sin p\,\sin(p-a)\,\sin(p-b)\,\sin(p-c)}}{\sin b\,\sin c} \quad [67]$$

$$\sin\ \hat{B} = 2\ \frac{\sqrt{\sin p\,\sin(p-a)\,\sin(p-b)\,\sin(p-c)}}{\sin a\,\sin c}$$

$$\sin\ \hat{C} = 2\ \frac{\sqrt{\sin p\,\sin(p-a)\,\sin(p-b)\,\sin(p-c)}}{\sin a\ \sin b}$$

Este evident că se poate obţine o egalitate dacă aducem fracţiile la acelaşi numitor; aceasta se face împărţind sinusul unui unghi cu sinusul arcului opus lui:

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c} = 2\ \frac{\sqrt{\sin p\,\sin(p-a)\,\sin(p-b)\,\sin(p-c)}}{\sin a\ \sin b\,\sin c} \quad [68]$$

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}} = \frac{\sin a\ \sin b\,\sin c}{2\sqrt{\sin p\,\sin(p-a)\,\sin(p-b)\,\sin(p-c)}} \quad [69]$$

$$\sin\ \hat{A} = \frac{\sin a\,\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin a\,\sin \hat{C}}{\sin c} \quad [70]$$

$$\sin\ \hat{B} = \frac{\sin b\,\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin b\,\sin \hat{C}}{\sin c}$$

$$\sin\ \hat{C} = \frac{\sin c\,\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin c\ \sin \hat{B}}{\sin b}$$

$$\sin a = \sin b\,\frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \sin c\,\frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}} \quad [71]$$

$\sin b = \sin a \dfrac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} = \sin c \dfrac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}}$

$\sin c = \sin a \dfrac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \sin b \dfrac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}$

Teorema sinusului:

Raportul dintre sinusul unui unghi şi sinusul arcului care formează latura opusă este constant .

10. ECUAŢIILE LUI DELAMBRE; ECUAŢIILE LUI NAPIER

A treia teoremă importantă în geometria plană este teorema tangentei; în trigonometria sferică echivalentul îl reprezintă „ecuţiile lui Napier”. Acesta a trăit în secolul al XVI-lea şi a introdus folosirea logaritmilor naturali în matematică. Totuşi, pentru a înţelege uşor aceste raporturi, este util să studiem întâi ecuaţiile lui Delambre, savant francez din secolul al XVIII-lea, care a contribuit la măsurarea meridianului şi la introducerea sistemului metric.

Iată demonstraţia dată de Spiru Haret teoremelor lui Delambre:

În triunghiul sferic ABC se scrie relaţia

$\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}$, apoi se introduc ecuaţiile [63] -[64]

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\sin(p-b)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} =$$

$$= \frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}}$$ dar

$$\sin(p-a) + \sin(p-b) = 2 \sin \frac{2p-a-b}{2} \cos \frac{p-b-(p-a)}{2} = 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin c = 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2} \qquad \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} = \cos \frac{C}{2}$$

Se simplifică 2 sin $\frac{c}{2}$ şi obţinem

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2} \qquad \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \quad [72]$$

Pentru aceleaşi două unghiuri se mai scriu următoarele ecuaţii:

$\sin\frac{A-B}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$

$\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$\cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

şi procedăm în fiecare caz la înlocuirea funcţiei sinus sau cos cu ecuaţiile echivalente [63] - [64]. Se obţin egalităţile

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \qquad [73]$$

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad [74]$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \qquad [75]$$

Ecuaţiile lui Napier se obţin împărţind [72]/[74], [73]/[75], [75]/[74], [73]/[72]

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \quad [76] \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \quad [77]$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \quad [78] \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} \quad [79]$$

11. TEOREMA COTANGENTEI

Avem următoarea situaţie: cunoaştem arcurile *a, b*, unghiurile $\hat{A}$ şi $\hat{C}$ - primele două formează unghiul $\hat{C}$, iar $\hat{A}$ este opus unuia dintre arce; din teoremele cosinusului şi sinusului aplicate arcurilor *a* şi *c* obţinem următoarele relaţii:

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}$ $\quad \sin c = \sin a \dfrac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C}$ de unde

$\cos a = \cos b\,(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C}) + \sin a \sin b \cos \hat{A} \dfrac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$

$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b\,(\cos b \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \operatorname{ctg} \hat{A})$

$\cos a\,(1- \cos^2 b) = \sin a \sin b\,(\cos b \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \operatorname{ctg} \hat{A}) \mid : \sin a \sin b$

$[=\sin^2 b]$

$\operatorname{ctg} a \sin b = \operatorname{ctg} \hat{A} \sin \hat{C} + \cos b \cos \hat{C}$

Regula generală: dacă în partea stângă avem ctg ***arcului* 1**, în partea dreaptă vom avea ctg ***unghiului* 1** în primul termen al sumei, dacă în stânga avem sin arcului 2 în dreapta avem - în al doilea termen - cos arcului 2, în primul termen din dreapta ctg se înmulţeşte cu sinusul unghiului 3, iar în al doilea cos se înmulţeşte cu cosinusul unghiului 3 - arcul 3 şi unghiul 2 nu apar în ecuaţie. Aşadar între *a, c*, $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ avem relaţia

$\operatorname{ctg} a \sin c = \operatorname{ctg} \hat{A} \sin \hat{B} + \cos c \cos \hat{B}$

Avem şase ecuaţii posibile:

ctg a sin b = ctg $\hat{A}$ sin $\hat{C}$ + cos b cos $\hat{C}$ [80]

ctg a sin c = ctg $\hat{A}$ sin $\hat{B}$ + cos c cos $\hat{B}$

ctg b sin a = ctg $\hat{B}$ sin $\hat{C}$ + cos a cos $\hat{C}$

ctg b sin c = ctg $\hat{B}$ sin $\hat{A}$ + cos c cos $\hat{A}$

ctg c sin a = ctg $\hat{C}$ sin $\hat{B}$ + cos a cos $\hat{B}$

ctg c sin b = ctg $\hat{C}$ sin $\hat{A}$ + cos b cos $\hat{A}$

12. RELAŢII ÎNTRE UNGHIURILE ŞI LATURILE TRIUNGHIURILOR SFERICE PARTICULARE

12.1. Triunghiurile echilaterale ;triunghiurile isoscele

Un triunghi echilateral sferic are, ca şi corespondentul său plan, trei laturi egale şi trei unghiuri egale, dar mărimea lor poate varia în limitele impuse de axiomele 19 şi 22. De aceea:

1. unghiul unui triunghi sferic echilateral va fi mai mare decât 60º, dar mai mic decât 180º;

2. arcul care formează laturile triunghiului este $a \leq 120°$. Aceste afirmaţii se vor verifica prin ecuaţiile următoare.

Teorema cotangentei pentru triunghiurile echilaterale este

ctg a sin a = ctg $\hat{A}$ sin $\hat{A}$ + cos a cos $\hat{A}$

cos a = cos $\hat{A}$ + cos a cos $\hat{A}$

de unde

cos a= cos $\hat{A}$ (1 + cos a) cos $\hat{A}$ = cos a (1- cos $\hat{A}$)

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos a}{1+\cos a} = (2\cos^2 \frac{a}{2} - 1)/\, 2\cos^2 \frac{a}{2}$$

$\cos a = \dfrac{\cos A}{1-\cos A} = (1- \sin^2 \dfrac{A}{2}) / 2 \sin^2 \dfrac{A}{2}$

$\dfrac{\sin a}{\sin A} = 2 \dfrac{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-a) \sin(p-a)}}{\sin a \ \sin a \sin a}$ dar

$p = \dfrac{3}{2} a \qquad p - a = \dfrac{3}{2} a - a = \dfrac{a}{2}$

$\dfrac{\sin a}{\sin A} = [2 \sin\dfrac{a}{2} (\sin \dfrac{3}{2} a \sin \dfrac{a}{2})^{1/2}]/\sin^3 a$

$\sin \dfrac{A}{2} = \dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\sin a} = \dfrac{1}{2 \cos\frac{a}{2}}$

$\cos \dfrac{A}{2} = [\sin \dfrac{3}{2} a \sin \dfrac{a}{2}]^{1/2} / \sin a$; considerând $\dfrac{3}{2} a = 3 \text{ x } \dfrac{a}{2}$ ajungem la

$\cos \dfrac{A}{2} = [3 \sin^2\dfrac{a}{2} - 4 \sin^4 \dfrac{a}{2}]^{1/2} / \sin a = [3 - 4 \sin^2 \dfrac{a}{2}]^{1/2} / 2 \cos \dfrac{a}{2}$ dar

$2 \cos\dfrac{a}{2} = (4 \cos^2\dfrac{a}{2})^{1/2} = (4- 4 \sin^2\dfrac{a}{2})^{1/2}$

$\cos \dfrac{A}{2} = [(3 - 4 \sin^2 \dfrac{a}{2})/(4 - 4 \sin^2 \dfrac{a}{2})]^{1/2}$

Se observă că trebuie să avem la numărător o valoare ≥ 0, aşadar $\sin \dfrac{a}{2}$ nu poate depăşi $\frac{\sqrt{3}}{2}$, astfel că $\dfrac{a}{2} < 60°$, iar $a < 120°$.

$\cos 120° = -½ \quad \cos \hat{A} = \dfrac{\cos a}{1+\cos a} = -1 \quad \hat{A} = 180°$.

Triunghiurile isoscele au laturile *a,b,b* şi unghiurile $\hat{A}, \hat{B}, \hat{B}$, prin urmare

$\cos a = \underline{\cos^2 b} + \sin^2 b \cos \hat{A}$ $\underline{1-\cos a} = \sin^2 b\ \underline{(1-\cos \hat{A})}$ $\sin b = \dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$

$[= 1-\sin^2 b]$ $[= 2\sin^2 \frac{a}{2}]$ $[= 2\sin^2 \frac{\hat{A}}{2}]$

$\cos b = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\hat{B}$ $\underline{(1-\cos a)} \cos b = \underline{\sin a} \sin b \cos\hat{B}$

$[= 2\sin^2 \frac{a}{2}]$ $[= 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}]$

$\cos\hat{B} = \mathrm{tg}\frac{a}{2}\ \mathrm{ctg}\ b$

$\mathrm{ctg}\ a \sin b = \mathrm{ctg}\ \hat{A} \sin\hat{B} + \cos b \cos\hat{B}$; $\mathrm{ctg}\ b \sin a = \mathrm{ctg}\ \hat{B} \sin\hat{B} + \cos a \cos\hat{B}$

12.2. Triunghiurile rectilaterale

Termenul *„rectilateral"* sau *„rectilater"* nu mai este înregistrat în dicţionare, totuşi el corespunde unei realităţi geometrice: cazul triunghiului sferic care are cel puţin o latură de 90 ° . Notăm această latură *a*.

$\sin a = 1$ $\cos a = 0$; $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\hat{A}$; $\cos \hat{A} = -\mathrm{ctg}\ b\ \mathrm{ctg}\ c$

$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\hat{B} = \cos\hat{B} \sin c$

$\cos c = \cos\hat{C} \sin b$

$\sin b \sin c (\cos\hat{B}\cos\hat{C} - \cos\hat{A}) = 0$ $\cos\hat{A} = -\cos\hat{B}\cos\hat{C}$

$\sin\hat{A} = \dfrac{\sin B}{\sin b} = \dfrac{\sin C}{\sin c}$ de unde

$\sin\hat{B} = \sin\hat{A} \sin b$; $\sin\hat{C} = \sin\hat{A} \sin c$ $\sin b = \dfrac{\cos c}{\cos C}$ $\sin c = \dfrac{\cos b}{\cos B}$

$\dfrac{\sin B \cos C}{\cos c} = \dfrac{\sin C}{\sin c}$ $\sin B\ \mathrm{ctg}\ C = \mathrm{ctg}\ c$ $\mathrm{tg}\ \hat{C} = \sin\hat{B}\ \mathrm{tg}\ c$ similar

$\mathrm{tg}\ \hat{B} = \sin\hat{C}\ \mathrm{tg}\ c$

$\mathrm{tg}\ \hat{A} = \sin\hat{A} / \cos\hat{A}$ $\cos\hat{A} = -\cos\hat{B}\cos\hat{C} = -\cos\hat{B}\cos c/\sin b$

$\mathrm{tg}\ \hat{A} = \sin\hat{B} / -\cos\hat{B}\cos c = -\mathrm{tg}\ \hat{B}/\cos c$ $\mathrm{tg}\ \hat{B} = -\mathrm{tg}\ \hat{A}\cos c$ similar

$\text{tg}\,\hat{C} = -\text{tg}\,\hat{A}\cos b$

Triunghiul rectilater poate fi, desigur, în acelaşi timp şi isoscel sau chiar echilateral. Aceste cazuri sunt importante pentru problemele care se referă la coordonatele geografice sau astronomice.

Să examinăm mai întâi cazul triunghiului isoscel cu laturile şi unghiurile $a, a, b, \hat{A}, \hat{A}, \hat{B}$. Avem

$\cos b = \cos^2 a + \sin^2 a \cos\hat{B} = \cos\hat{B}$ de unde $b = \hat{B}$

ceea ce explică egalitatea unghiului dintre două meridiane cu diferenţa de longitudine măsurată la Ecuator.

Aceasta are drept urmare faptul că *un triunghi rectilateral cu toate laturile egale are toate unghiurile drepte*. Pe o sferă pot fi opt triunghiuri echilaterale cu laturile şi unghiurile egale cu 90º.

12.3.Triunghiurile dreptunghice

Dacă unghiul $\hat{A}$=90º, atunci $\sin\hat{A}=1$, $\cos\hat{A}=0$, iar

$\cos a = \cos b \cos c$ [81]

$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$

$\sin b = \sin a \sin\hat{B}$ [82]

$\sin c = \sin a \sin\hat{C}$

$\text{ctg}\, a \sin b = \text{ctg}\,\hat{A} \sin\hat{C} + \cos b \cos\hat{C}$ de unde

[=0]

$\text{ctg}\, a \sin b = \cos b \cos\hat{C}$

$\cos\hat{C} = \text{ctg}\, a\, \text{tg}\, b = \frac{\text{tg}\, b}{\text{tg}\, a}$ [83]

$\cos\hat{B} = \text{ctg}\, a\, \text{tg}\, c = \frac{\text{tg}\, c}{\text{tg}\, a}$

$\text{tg } a = \frac{\text{tg } b}{\cos C} = \frac{\text{tg } c}{\cos B}$ [84]

tg b= tg a cos$\hat{}C$; tg c = tg a cos $\hat{}B$

ctg b sin c = ctg $\hat{}B$ sin $\hat{A}$ + cos c cos $\hat{A}$

ctg c sin b = ctg $\hat{}C$ sin $\hat{A}$ + cos b cos $\hat{A}$

de unde

sin b = tg c ctg $\hat{}C$= $\frac{\text{tg } c}{\text{tg } C}$; sin c = tg b ctg $\hat{}B$=$\frac{\text{tg } b}{\text{tg } B}$ [85]

tg $\hat{}B$= $\frac{\text{tg } b}{\sin c}$; tg $\hat{}C$ = $\frac{\text{tg } c}{\sin b}$ [86]

tg b= tg $\hat{}B$ sin c; tg c= tg $\hat{}C$ sin b [87]

ctg $\hat{}B$= sin c ctg b; ctg $\hat{}C$= sin b ctg c [88]

Se poate reproşa faptul că am insistat asupra unor relaţii care se pot obţine uşor una din alta; este adevărat, dar dintre toate triunghiurile sferice particulare triunghiul dreptunghic este cel mai frecvent folosit în calcule, astfel că este util să avem cât mai multe variante calculate direct.

13. TRIUNGHIUL POLAR; ECUAŢIILE LUI GAUSS PENTRU UNGHIURI

13.1. Definiţia polilor. Fie Π planul unui cerc mare; prin definiţie centrul sferei (*O*) se află în acest plan. Este evident că din diverse puncte ale sferei se pot duce perpendiculare la Π, dar numai din două - $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ - perpendiculara va trece prin *O*. Pentru acest caz spunem că $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{P}'$ sunt poli ai cercului mare dat iniţial [*nu ai oricărui cerc mare*].

Aşadar: *se numesc "poli" ai unui cerc mare intersecţiile cu sfera ale perpendicularei pe planul său în centrul sferei.*Polul Nord şi Polul Sud sunt poli ai Pământului faţă de Ecuator, dacă însă variem planul de referinţă "polii" vor fi diferiţi; în astronomie avem Poli Ecliptici şi Poli Galactici, dacă ne referim la planul eclipticii sau la planul

galaxiei. Perpendiculara creează întotdeauna doi poli, dar nu suntem interesaţi întotdeauna de amândoi.

$\mathcal{P}\ \mathcal{P}'$este un diametru al sferei, astfel încât arcurile dintre aceste două puncte au întotdeauna 180º, iar $\mathcal{P}\,\Pi= \mathcal{P}'\,\Pi$=90º.

13.2.Triunghiul polar. Să considerăm două triunghiuri sferice *ABC* şi *A'B'C'*. Triunghiul *A'B'C'* este construit astfel încât *A* este pol pentru cercul mare determinat de punctul *O* şi *B'C', B* pentru *O* şi *A'C'*, *C* pentru *O* şi *A'B'*. Notăm similar cu triunghiul obişnuit

$B'C'=a'$ $A'C'=b'$ $A'B'= c'$;

$AB'= AC'= AN$=90° $N\in B'C'$și la fel pentru celelalte două vârfuri. Să se observe că atât *A'B'C'* este triunghi polar pentru *ABC*, cât și *ABC* este triunghi polar pentru *A'B'C'*. Astfel există posibilitatea ca *A'B'C'* să se afle fie în interiorul, fie în exteriorul triunghiului *ABC*, după cum am stabilit notația inițială; întotdeauna este vorba de o relație reciprocă în perechea de triunghiuri, ceea ce rezultă pentru *A'B'C'* este real și pentru *ABC.*

Pentru a ușura demonstrația să admitem că *A'B'C'* este triunghiul exterior; prelungind arcul *AB* până la intersecția cu latura *B'C'* obținem punctul *X*, iar prelungind corespunzător *AC* avem intersecția cu latura *B'C'* în *Y*. Din relația cunoscută de la triunghiurile rectilaterale

$XY =\hat{A}$; vârful *B'*este pol pentru arcul *AC*, iar *C'* pentru arcul *AB*

$B'Y=C'X$=90° $B'Y= B'X +XY$; $C'X=C'Y +XY$; $B'C'= B'X +XY + C'Y$

Dacă adunăm $B'Y + C'X= B'X +XY + C'Y +XY$ =90° + 90°=180°, dar în sumă

arcul *XY* apare de două ori; deoarece $B'C'=a'$, iar $XY=\hat{A}$ obținem relația fundamentală a triunghiurilor polare:

a'=180' - $\hat{A}$ $a' +\hat{A}$ =180°

un unghi al unui triunghi sferic și latura opusă lui în triunghiul polar sunt suplimentare; se deduce imediat că dacă unul dintre triunghiuri este rectilater celălalt este dreptunghic și viceversa.

$a' = 180^\circ - A$ $b' = 180^\circ - B$ $c' = 180^\circ - C$ [89]

$A = 180 - a'$ $B = 180 - b'$ $C = 180^\circ - c'$

$a = 180 - A'$ $b = 180 - B'$ $c = 180^\circ - C'$

$A' = 180^\circ - a$ $B' = 180^\circ - b$ $C' = 180^\circ - c$

Această proprietate poate simplifica unele sisteme de ecuații. Sunt importante următoarele două relații.

1. Deoarece $\sin(180^\circ - x) = \sin x$, $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ - v. I,4.2 - şi $(-1)x(-1) = 1$,

avem

$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'$

$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B) \cos(180^\circ - C) + \sin(180^\circ - B) \sin(180^\circ - C) \cos(180^\circ - a)$

înmulţim cu -1 şi obţinem *ecuaţiile lui Gauss pentru unghiuri*

$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$ [90]

$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$

$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$

2. Se poate demonstra afirmația 19: „ Suma unghiurilor unui triunghi sferic este întotdeauna mai mare decât 180º şi mai mică decât 540º”.

Am arătat mai sus că $a' + \hat{A} = 180°$; similar $b' + \hat{B} = 180°$, $c' + \hat{C} = 180°$; atunci

$A + B + C + a' + b' + c' = 3 \times 180° = 540°$

$A + B + C = 540° - (a' + b' + c')$, dar $(a' + b' + c')$ nu poate fi 0° - atunci triunghiul polar s-ar reduce la un punct și reciproc și primul triunghi -, nici 360° - caz în care laturile ar forma un cerc, nu un triunghi. Rezultă că $0° < a' + b' + c' < 360°$, iar

$180° < A + B + C < 540°$

NOTĂ. *Ecuațiile lui Gauss pentru laturi sunt*

sin b cos A = cos a sin c - sin a cos c cos B [91]

sin c cos A= cos $a$sin b - sin a cos b cos C

sin a cos B = cos b sin c - sin b cos c cos A

sin c cos B = cos b sin c - sin b cos a cos C

sin a cos C= cos c sin b - sin c cos b cos A

sin $b$cos C = cos c sin a - sin c cos a cos B

Pentru detalii - demonstrația fiind de un nivel mai ridicat decât al lucrării de față - v.

Astronomie - Seminar 1 www. math.ubbcluj.ro

14.EXCESUL SFERIC

Să reluăm discuția precedentă: dacă $a'+b'+c'$ =360° suma $A + B + C$ = 180°, astfel încât triunghiul sferic devine triunghiul plan ABC înscris în cercul format de arcurile a',b',c'; prin urmare toate caracteristicile sferice ale triunghiului ABC depind direct de curbura dată de depășirea sumei de 180°. Diferența

$A + B + C$ - 180° =ε se numește *exces sferic*.

Este o mărime utilă pentru calcularea laturilor atunci când cunoaștem doar cele trei unghiuri ale triunghiului sferic, pentru calcularea razelor cercurilor circumscris și înscris.

Este foarte ușor să calculăm direct mărimea ε atunci când avem toate unghiurile sau suficiente elemente - de exemplu două unghiuri și una dintre laturile opuse lor, două laturi și unghiul dintre ele - pentru a calcula necunoscutele.

Există însă și situații în care cunoaștem doar laturile a,b,c. Putem urma o cale indirectă: calculăm de exemplu sinusurile jumătăților unghiurilor și obținem mărimea lor din arcsinusuri. Ar fi însă mai util să putem stabili relații directe între laturi, unghiuri și excesul sferic.

Pentru rezolvarea aceastor probleme se folosesc ecuațiile lui Delambre și cea a lui S. A. J. Lhuiller.

Să presupunem cunoscute unghiurile A, B,C; fie a', b', c' laturile triunghiului polar corespunzător.

$A + B + C = 540° - (a'+b'+c')$ $a'+b'+c' = 2p'$ $540° = 360° + 180°$

$2p' = 360° - (A + B + C - 180°) = 360° - \varepsilon$ de unde

$p' = 180° - \frac{\varepsilon}{2}$

$p' - a' = 180° - \frac{\varepsilon}{2} - (180° - A) = A - \frac{\varepsilon}{2}$

$p' - b' = B - \frac{\varepsilon}{2}$

$p' - c' = C - \frac{\varepsilon}{2}$

calculăm funcțiile unghiului $\frac{\hat{A}'}{2}$ folosind ecuațiile 63- 64 de mai sus

$$\sin\frac{\hat{A}'}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p'-b')\sin(p'-c')}{\sin b' \sin c'}} \quad \cos\frac{\hat{A}'}{2} = \sqrt{\frac{\sin p' \sin(p'-a')}{\sin b' \sin c'}}$$

însă $A' = 180° - a$ $\frac{\hat{A}'}{2} = 90° - \frac{a}{2}$ de unde $\sin\frac{\hat{A}'}{2} = \cos\frac{a}{2}$

$\cos\frac{\hat{A}'}{2} = \sin\frac{a}{2}$

substituind p' , $p' - a'$, $p' - b'$, $p' - c'$ cu egalitățile arătate mai sus și reamintind că

$\sin(180° - \beta) = \sin\beta$ v. paragraful I,4.2

avem forma finală a ecuațiilor

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C}} \quad \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} \quad \left(\frac{a}{2} < 90°\right)$$

sinusuri [92]

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C}} \quad \sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin C}} \quad \sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin C}}$$

cosinusuri [93]

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C}}$$

$$\cos\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin C}} \quad \cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin B}}$$

tangente [94]

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} \quad \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}$$

Se poate scrie - ținând seama că $2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a > 0$ pe intervalul 0° - 180°- și ecuația directă

$$\sin a = 2\,\frac{\sqrt{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\sin B \sin C} \quad [95]$$

$$\sin b = 2\,\frac{\sqrt{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\sin A \sin C}$$

$$\sin c = 2\,\frac{\sqrt{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\sin A \sin B}$$

avantajul ecuațiilor 92-94 fiind că avem un singur arc pentru mărimea calculată, deoarece în intervalul [0°,90°] există un singur sinus cu această valoare.

Demonstrația ecuației lui Lhuiller este destul de laborioasă; se pornește de la $A+B+C-180° = \varepsilon$, $\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C-\varepsilon}{2}$

$\sin(90° - \hat{u}) = \cos\hat{u}$, $\cos(90° - \hat{u}) = \sin\hat{u}$,

$\frac{v}{w} = \frac{x}{y} \leftrightarrow \frac{v-w}{v+w} = \frac{x-y}{x+y}$

și se aplică formulelor 73-74 ale lui Delambre; se obține relația

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \left(\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}\right)^{1/2} \quad [96]$$

Notă. Detalii referitoare la această egalitate precum și la celelalte ecuații din capitolele 14 - 15 se găsesc în cursul lui Spiru Haret, pp.206-211; nivelul acestui ghid sumar nu permite intrarea în toate amănuntele.

Pornind de la egalitatea [94] și înmulțind $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ cu $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, apoi simplificând produsul lor se ajunge la relația

$$\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} = \left(\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2} + \cos C\right)/\sin C \quad [97]$$

15. CALOTA, RAZA CERCULUI CIRCUMSCRIS ȘI CELUI ÎNSCRIS ÎN TRIUNGHIUL SFERIC; ARCE IMPORTANTE

1.Generalități.Să presupunem că într-o sferă reală cunoaștem înălțimea I și raza r_b a bazei unei calote; P este polul, O_b este centrul cercului bazei; O fiind centrul, iar R_s raza sferei; A, B, C sunt trei puncte astfel încât

$PA = PB = PC = R_o$ $O_bA = O_bB = O_bC = r_b$; $\{A, B, C, r_b\} \in \Pi$ Π fiind planul secțiunii bazei

Este evident că A, B, C formează un triunghi sferic pe suprafața calotei și unul plan, proiecție a primului, pe bază.

R_o este raza cercului circumscris triunghiului sferic, P fiind centrul său; unghiul POA ne permite următoarele relații evidente

$r_b = R_s \sin R_o$ $I = R_s (1- \cos R_o) = 2 R_s \sin^2 ½ R_o$ deoarece

$\sin R_o = 2 \sin ½ R_o \cos ½ R_o$

$r_b / I = \text{tg } ½ R_o$

Dacă A, B, C sunt unghiurile triunghiului sferic, vom nota unghiurile triunghiului plan corespunzător cu A_b, B_b, C_b;

$B_b C_b$ este coarda arcului a și latura „a" în triunghiul plan

$A_b C_b$ este coarda arcului b și latura „b" în triunghiul plan

$A_b B_b$ este coarda arcului c și latura „c" în triunghiul plan

$B_b C_b = 2 R_s \sin ½ a = \text{a}$

$A_b C_b = 2 R_s \sin ½ b = \text{b}$

$A_b B_b = 2 R_s \sin ½ c = \text{c}$

Din ecuația [49] obținem

$2 R_s \sin ½ a / \sin A_b = 2 R_s \sin ½ b / \sin B_b = 2 R_s \sin ½ c / \sin C_b = 2 R_s \sin R_o$

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin Ab} = \sin R_o$$

Notând tg ½ R_o = t folosind egalitatea [26] obținem

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin Ab} = 2\,t/(1 + t^2) = 2\,Ir_b/(I^2 + r_b^2).$$

2.<u>Raza cercului circumscris.</u> Ecuațiile anterioare au avut rolul să ușureze calculul în cazul sferelor reale, pentru probleme cu date metrice. Ecuația generală pentru R_o se poate obține în mai multe forme cu demonstrații diferite; am considerat că următoarea este cea mai simplă și nu necesită neapărat un desen explicativ.

Trasăm razele dintre polul P și *A*, *B*, *C*; se creează trei triunghiuri isoscele: *APB*, *APC* și *BPC*; unghiurile *A*, *B*, *C* sunt împărțite de raze astfel încât la baza fiecărui triunghi echilateral avem două unghiuri necunoscute dar egale între ele. Pentru a simplifica scrierea notăm:

<) *PAB*=<) *PBA*= x; <) *PAC*=<) *PCA*= y <) *PBC*= <) *PCB*= z având între ele relațiile:

$x + y = A$ *(1)* *(1) - (2)* → $y - z = A - B$ *(4)*

$x + z = B$ *(2)* *(4) + (3)* → $2y = A - B + C$

$y + z = C$ *(3)* de unde

$$y = \frac{A-B+C}{2}$$

$$x = A - \frac{A-B+C}{2} = \frac{A+B-C}{2} = \frac{A+B+C-2C}{2}$$

$$z = C - \frac{A-B+C}{2} = \frac{C+B-A}{2}$$

deoarece $A + B + C = 180° + \varepsilon$

$$x = 90° + \frac{\varepsilon}{2} - C$$

$$\cos x = \cos\left(90° + \frac{\varepsilon}{2} - C\right) = -\sin\left(\frac{\varepsilon}{2} - C\right) = \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

astfel că în triunghiul isoscel APB putem scrie ecuația uneia dintre laturile $AP=PB=R_o$

$\cos R_o = \cos R_o \cos AB + \sin R_o \sin AB \cos x$

dar $AB = c$, $\cos x = \sin (C - \frac{\varepsilon}{2})$; împărțind cu $\cos R_o$ obținem

$1 = \cos c + \sin c \operatorname{tg} R_o \sin (C - \frac{\varepsilon}{2})$

$1 - \cos c = 2 \sin^2 \frac{c}{2}$

$\sin c = 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}$

$(1 - \cos c) / \sin c = \operatorname{tg} \frac{c}{2}$

$\operatorname{tg} R_o = \operatorname{tg} \frac{c}{2} / \sin (C - \frac{\varepsilon}{2})$

Simetric se poate scrie ecuația generală pentru oricare latură

$\operatorname{Tg} R_o = \operatorname{tg} \frac{a}{2} / \sin (A - \frac{\varepsilon}{2}) = \operatorname{tg} \frac{b}{2} / \sin (B - \frac{\varepsilon}{2}) = \operatorname{tg} \frac{c}{2} / \sin (C - \frac{\varepsilon}{2})$ [98]

Alte forme pentru R_o sunt:

$\operatorname{Tg} R_o = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}$ [99]

$\operatorname{Tg} R_o = 2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} / [\sin p \sin (p- a) \sin (p- b) \sin (p- c)]^{1/2}$ [100]

Notă. Deoarece

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{2\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}} =$$

$$\frac{8 \sin\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \cos\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2} \cos\frac{c}{2}}{2\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}} = \frac{4 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2} \cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}$$

$\text{tg}\, R_o = \frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}$

$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}}$: $\text{tg}\, R_o = 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$

Acum se pot calcula ecuațiile de la 15.1 dacă ținem seama de egalitățile

$\text{tg}\, \frac{1}{2} R_o = [-1 + (1 + \text{tg}^2 R_o)^{1/2}] / \text{tg}\, R_o$, valoare pozitivă deoarece R_o are prin construcție cel mult 90°;

$\sin R_o = \text{tg}\, R_o / (1 + \text{tg}^2 R_o)^{1/2} = \text{tg}\frac{a}{2} / [\sin^2 (A - \frac{\varepsilon}{2}) + \text{tg}^2 \frac{a}{2}]^{1/2} =$

$= \sin\frac{a}{2} / \cos\frac{a}{2} [\sin^2 (A - \frac{\varepsilon}{2}) + \text{tg}^2 \frac{a}{2}]^{1/2}$

$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin Ab} = \sin R_o$

$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin Ab} = \sin\frac{a}{2} / \cos\frac{a}{2} [\sin^2 (A - \frac{\varepsilon}{2}) + \text{tg}^2 \frac{a}{2}]^{1/2}$

$\sin A_b = \cos\frac{a}{2} [\sin^2 (A - \frac{\varepsilon}{2}) + \text{tg}^2 \frac{a}{2}]^{1/2} = [\cos^2\frac{a}{2} \sin^2 (A - \frac{\varepsilon}{2}) + \sin^2\frac{a}{2}]^{1/2}$

$\sin A_b = [\cos^2\frac{a}{2} \sin^2 (A - \frac{\varepsilon}{2}) + 1 - \cos^2\frac{a}{2}]^{1/2} = [1 - \cos^2\frac{a}{2} \cos^2 (A - \frac{\varepsilon}{2})]^{1/2}$

$\sin A_b = [1 - \cos^2\frac{a}{2} \cos^2 (A - \frac{\varepsilon}{2})]^{1/2}$ [101]

$\sin A_b = [1 - \cos^2 A_b]^{1/2}$ de unde

$\cos A_b = \cos\frac{a}{2} \cos (A - \frac{\varepsilon}{2})$ [102]

Se obține astfel o relație directă între unghiul plan și cel sferic corespunzător.

3. <u>Raza cercului înscris.</u> Să notăm această rază r_o; calota cercului respectiv are polul $\mathcal{P}$. Deoarece laturile triunghiului *ABC* sunt tangente cercului în punctele D ϵ *BC*, E ϵ *AC*, F ϵ *AB*, razele $\mathcal{P}$D, $\mathcal{P}$E, $\mathcal{P}$F sunt perpendiculare în punctele respective.

Să observăm că în triunghiurile $\mathcal{P}AE$ și $\mathcal{P}AF$ arcul $\mathcal{P}A$ este comun, $\mathcal{P}$E = $\mathcal{P}$F = r_o, unghiurile E și F sunt drepte; cele două triunghiuri sunt așadar egale, iar $\mathcal{P}A$ este bisectoarea unghiului $\hat{A}$; unghiurile rezultate sunt $\mathcal{P}AE$ și $\mathcal{P}AF$.

Rezultă că $AE=AF$; similar se demonstrează că $BD=BF$, $DC=CE$.

$AB=AF+BF = AE + BD$

$BC=BD+DC =a$

$AC=AE + EC = AE + DC$

$a + b + c = 2\,BD + 2\,DC + 2\,AE$

$p = BD + DC + AE = a + AE$

$AE= p - a$

Ecuația 85 ne dă relația

$\sin AE = \text{ctg}\ \mathcal{P}AE\ \text{tg}\ \mathcal{P}E$, de unde

$\sin (p - a)= \text{ctg} \frac{A}{2}\ \text{tg}\ r_o$

$\text{tg}\ r_o= \text{tg} \frac{A}{2} \sin (p - a)$ [103]

$\text{tg}\ r_o= \text{tg} \frac{A}{2} \sin (p - a)= \sin (p - a) \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} = = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$

[104]

4. Înălțimile, mediatoarele, bisectoarele și medianele triunghiului sferic.

Dacă $D \in BC$, AD _|_ BC, arcul AD este înălțime a triunghiului sferic ABC. Triunghiul ADC este dreptunghic

$\sin AD / \sin \hat{B} = \sin AB / \sin 90° = \sin c$

$\sin AD / \sin \hat{C} = \sin AC / \sin 90° = \sin b$

Dacă P este polul calotei pe care se află triunghiul ABC, $PB=PC=R_o$, $L \in BC$

$BL=LC=\frac{a}{2}$, atunci PL este mediatoarea laturii a și este un arc perpendicular pe BC.

$\cos R_o = \cos \frac{a}{2} \cos PL$

$\cos PL = \cos R_o / \cos \frac{a}{2}$

Dacă $\mathcal{P}$ este polul cercului înscris în triunghiul ABC, $\mathcal{P}A$ este bisectoarea unghiului $\hat{A}$, $E \in AC$, $\mathcal{P}E = r_o$,

$\sin \mathcal{P}A = \sin r_o / \sin \frac{\hat{A}}{2}$

Mediana AL împarte latura BC în părți egale, fără a fi perpendiculară pe ea.

$\cos AL = \cos \frac{a}{2} \cos c + \sin \frac{a}{2} \sin c \cos B = \cos \frac{a}{2} \cos b + \sin \frac{a}{2} \sin b \cos C$

Note. 1. Să se observe că ecuațiile de mai sus demonstrează implicit că P și $\mathcal{P}$ nu coincid decât dacă toate cele trei mediatoare sunt și bisectoare, adică triunghiul este echilateral.

2. Lungimile bisectoarelor și punctele de intersecție ale mediatoarelor cu laturile se calculează folosind rezolvarea de la cazul 4 din II,16 deoarece cunoaștem două unghiuri și latura dintre ele.

5. Fusul sferic.Suprafața triunghiului sferic.

Se numește „fus sferic" suprafața delimitată pe o sferă de două cercuri mari care au aceiași diametru; de aici provine expresia „fus orar". Este evident că se formează *perechi* de fusuri, egale ca suprafață; trebuie de aceea indicată aria avută în vedere.

Dacă planurile cercurilor mari formează unghiul D, suprafața fusului este

$S_D = 2 \pi R_S^2 D/ 180$ [105]

Trasând cele trei cercuri mari din care fac parte laturile a, b, c obținem trei fusuri având unghiurile diedre A, B, C de la vârfurile triunghiului. Se găsește în final relația

$S_{ABC} = (A + B + C - 180°) R_S^2 \pi / 180° = \varepsilon R_S^2 \pi / 180°$ [106]

Pentru demonstrație v. trimiterea de la nota ecuațiilor [91].

Spiru Haret simplifică ecuația 106 punând

$\frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{648000''} = \sin 1''$, astfel

$S_{ABC} = \varepsilon'' R_S^2 \sin 1''$ [107]

unde excesul sferic este exprimat în secunde, iar R_S este raza sferei.

Suprafața calotei sferice fiind

$S = 2 \pi R_S I = 4 \pi R_S^2 \sin^2 ½ R_o$

iar suprafața bazei

$S_b = \pi r_b^2 = \pi R_s^2 \sin^2 R_o = 4 \pi R_s^2 \sin^2 ½ R_o \cos^2 ½ R_o$

$S_b / S = \cos^2 ½ R_o$

Deoarece acest raport există între toate suprafețele de pe calotă și proiecția lor pe bază, el este corect și pentru triunghiul sferic și triunghiul plan corespunzător. Dacă datele pe care le avem ne permit calcularea suprafeței S_{pr} a triunghiului A_b B_b C_b putem considera suprafața triunghiului sferic ABC

$S_{ABC} = S_{pr} / \cos^2 ½ R_o$

16. REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR SFERICE

Ecuațiile precedente conțin practic toate formulele necesare pentru rezolvarea triunghiurilor sferice, de aceea prezentarea soluțiilor va fi succintă. Trebuie spus că în manualele de trigonometrie - plană sau sferică - se insista asupra ecuațiilor care se pot rezolva prin folosirea logaritmilor. Este un lucru justificat deoarece logaritmii - naturali și zecimali - au fost introduși în matematică mai ales pentru rezolvarea problemelor trigonometrice - v. mai sus ecuațiile lui Napier. Logaritmii continuă să fie utili, dar după apariția calculatoarelor personale ei sunt neobservați, undeva în fundalul operațiunilor din programe. Pentru uzul curent nu se mai poate insista asupra calculelor care implică tabele greoaie cu mantise având doar 5 sau 7 zecimale și caracteristici negative care sunt operate separat. Acest tip de folosire al logaritmilor este desuet și destul de imprecis; iată două exemple din *The Universal Encyclopedia of Mathematics*, ed. G. Allen and Unwin, Londra, 1964 din articolul *logarithm*, pp. 282-283 cu nota:

37^3 calculat drept 3lg 37= 50652, în timp ce 37 x 37 x37 =50653

$\sqrt[3]{35}$ obținută prin logaritmi este 3,2711 față de $\sqrt[3]{35}$ = 3,271 066 310

Desigur triunghiurile dreptunghice, rectilatere și echilaterale sunt cazuri particulare care prin proprietățile lor ușurează calculele. Transformarea rezolvării triunghiului oarecare în rezolvarea a două triunghiuri dreptunghice sau particulare poate simplifica rezolvarea. Pentru acestea se va vedea capitolul 12. Există soluții diverse și „stiluri" de rezolvare potrivite fiecărei persoane. De aceea în cele ce urmează am indicat doar o cale generală de abordare a problemelor pe căile cele mai simple.

Pentru a rezolva un triunghi sferic sunt necesare și suficiente trei din cele 6 elemente: trei laturi și trei unghiuri.

1. Sunt cunoscute *a*, *b*, *c*; unghiurile se calculează sub forma funcției jumătății lor - ecuațiile [63] -[66]; excesul sferic ε se obține imediat prin ecuația [96].

2. Se cunosc *Â,^B,^C*; se calculează ε, apoi una din funcțiile fiecărei laturi cu ecuațiile [92] - [94].

3. Se cunosc *a, b, ^C*; se calculează cos *c* după teorema cosinusului [61], apoi jumătățile celorlalte două unghiuri.

4. Se cunosc *Â*,^*B*, *c*; dintre ecuațiile [80] se folosește

ctg *a* sin *c* = ctg *Â* sin ˆ*B* + cos *c* cosˆ*B*

prin care se obține ctg *a*. Laturile *a, c* și unghiul *B* permit calcularea lui *b*. $\frac{C}{2}$ se obține folosind *p.*

5. Se cunosc *a,b,Â*; se calculează ^*B* folosind teorema sinusului [68], dar trebuie să se țină cont că există *două unghiuri* care au același sinus: *x* și (180°- *x*). Din ecuațiile lui Napier [77] și [79] se obțin tg $\frac{C}{2}$ și tg$\frac{c}{2}$:

$$\text{tg}\,\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\,\text{ctg}\,\frac{A-B}{2}$$

$$\text{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\,\text{tg}\,\frac{a-b}{2}$$ (se folosește forma răsturnată a raportului 79). $\frac{C}{2}$ și $\frac{c}{2}$ fac parte din intervalul (0°,90°), astfel că se va alege pentru unghiul *B* mărimea care dă tangentelor valori pozitive - mai simplu *a -b* și *A-B* trebuie să aibă același semn.

6. Se cunosc *a,Â,* ^*B*; se calculează *b* cu teorema sinusului [68], apoi se obțin tg $\frac{C}{2}$ și tg$\frac{c}{2}$ din aceleași ecuații.